

Министерство сельского хозяйства РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«СМОЛЕНСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»



Белокопытов А.В.

Эконометрика. Продвинутый уровень

Учебное пособие

Смоленск
2018

УДК 330.143
ББК 65.050
Б-141

Рецензент: Матвеева Е.В., зав. кафедрой экономики ФГБОУ ВО СмолГУ.

Белокопытов Алексей Вячеславович

Эконометрика. Продвинутый уровень: учебное пособие / А.В. Белокопытов – Смоленск: ФГБОУ ВО Смоленская ГСХА, 2018. – 77 с.

Учебное пособие подготовлено в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по направлениям подготовки 38.04.01 Экономика (уровень магистратура) и может быть использовано при изучении курсов «Эконометрика. Продвинутый уровень», «Эконометрика». В учебном пособии рассмотрены вопросы использования производственных функций, параметрические и непараметрические методы оценки, возможности оценки между качественными признаками.

Предназначено для студентов экономических направлений, научных сотрудников и аспирантов.

Печатается по решению Методического совета ФГБОУ ВО Смоленская ГСХА (протокол №3 от 4 мая 2018 года)

© Белокопытов А.В., 2018

© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Смоленская государственная сельскохозяйственная академия», 2018

Оглавление

Введение.....	4
ГЛАВА 1. ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ И ЕЕ ВИДЫ.....	5
ГЛАВА 2. ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ КОББА-ДУГЛАСА.....	15
ГЛАВА 3. ДВУХФАКТОРНАЯ ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ СОЛОУ.....	24
Тема 4. ГЛАВА 4. НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ СВЯЗИ. МОДЕЛИРОВАНИЕ СПРОСА И КАЧЕСТВА ПРОДУКЦИИ	31
ГЛАВА 5. КРИТЕРИИ Q-КРИТЕРИЙ РОЗЕНБАУМА И U-КРИТЕРИЙ МАННА-УИТНИ	52
ГЛАВА 6. Т-КРИТЕРИЙ ВИЛКОКСОНА И ОЦЕНКА СВЯЗИ МЕЖДУ КАЧЕСТВЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ.....	64
Приложение.....	73

ВВЕДЕНИЕ

Для экономической теории и практики все большее значение приобретают вопросы прогнозирования развития общественного производства, выбора альтернатив экономического роста в условиях ограниченных ресурсов, определения наиболее эффективных путей достижения экономических результатов.

Действенным инструментом научного анализа тенденций и прогнозирования перспектив экономического роста является экономико-математическое моделирование, в частности использование методов корреляционно-регрессионного анализа и производственных ресурсов. Особенно эффективно использование эконометрических моделей при изучении динамики и тенденций развития экономики, выявления влияния важнейших факторов на конечные результаты.

В системе эконометрических моделей важное место занимают производственные функции, которые позволяют выявить доминирующие факторы развития предприятия, оценить всесторонне эффективность деятельности. Производственная функция — это экономико-математическая модель, позволяющая аппроксимировать зависимость результатов производственной деятельности предприятия, отрасли или национальной экономики в целом от повлиявших на эти результаты факторных переменных. В данном пособии уделено внимание производственным функциям и другим важным разделам курса «Эконометрика. Продвинутый уровень», которые изучаются в рамках магистерской программы по направлению 38.04.01 – Экономика.

В каждой теме в доступной форме кратко представлен конкретный теоретический и иллюстративный материал в виде таблиц, схем, рисунков, расчетов, формул и т.д. Для лучшего усвоения материала в работе содержится большое количество примеров с подробным анализом их решения.

ГЛАВА 1. ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ И ЕЕ ВИДЫ.

В парной и множественной регрессии возможны разные виды уравнений регрессии: линейные и нелинейные. Ввиду четкой интерпретации параметров наиболее широко используются линейная и степенная функции. Степенную функцию используют часто при моделировании экономических процессов на микро- и макроуровнях. В связи с этим появилось понятие производственная функция.

Производственная функция — это экономико-математическая модель, позволяющая аппроксимировать зависимость результатов производственной деятельности предприятия, отрасли или национальной экономики в целом от повлиявших на эти результаты факторных переменных.

Факторными переменными в производственных функциях могут быть:

- объем выпущенной продукции (в стоимостном или натуральном выражении);
- объем основного капитала или основных фондов;
- объем трудовых ресурсов или трудовых затрат;
- затраты электроэнергии;
- количество станков, используемое в производстве.

Однофакторные производственные функции (ОПФ)—это простейшая разновидность производственных функций. Результатом, или **результативной переменной**, в ОПФ часто является один из показателей эффективности производства или объем производства y . Результативная переменная зависит только от одной **факторной переменной** x (например, переменной общих производственных затрат). Выделяют несколько видов ОПФ.

Линейная ОПФ может характеризовать зависимость объема производства y (результативной переменной) от величины затрат какого-либо ресурса (факторной переменной):

$$y=a+bx$$

Например, зависимость объем производства y от величины трудовых затрат x .

Параболическая ОПФ вида:

$$y = a + b_1 x_1 + b_2 x^2 \quad a > 0 \quad b_1 > 0 \quad b_2 > 0$$

Параболическая ОПФ характеризуется тем, что с увеличением затрат ресурса x объем производства (эффективность производства) y вначале возрастает до некоторой максимальной величины, а затем снижается до нуля. Так, например, увеличение количества внесенных удобрений (ресурс) приводит, при прочих равных условиях, к росту урожайности, размеру получаемой прибыли, но чрезмерное внесение их без изменения других элементов к дальнейшему повышению результативности производства не приводит, а, наоборот, снижает ее.

Параметр b_2 в параболе $y = a + b_1 x_1 + b_2 x^2$ характеризует степень ускорения или замедления кривизны параболы. Параметр b_1 характеризует угол наклона кривой, а параметр a — начало кривой.

Степенная ОПФ вида:

$$y = ax^b, \quad a, b > 0$$

Степенная ОПФ характеризуется тем, что с увеличением затрат ресурса x объем производства y возрастает неограниченно. Например, зависимость объема производства (шт.) y от размер материальных затрат (руб.) x .

Показательная ОПФ вида:

$$y = ab^x, \quad a, b > 0$$

В эконометрике часто используют его аналог вида:

$$y = a - k \cdot b^x, \quad 1 > b > 0, \quad k = 1,$$

при этом ее нельзя привести к линейному виду и ее параметры оцениваются методом итераций или другим методом.

Показательная ОПФ характеризуется тем, что с увеличением затрат ресурса объем производства y также растет, стремясь при этом к определенному значению, во втором случае к значению коэффициента a .

Гиперболическая ОПФ вида:

$$y = a + b/x$$

Гиперболическая ОПФ характеризуется тем, что с увеличением затрат ресурса x объем производства y уменьшается. Данная ОПФ на практике не используется.

Двухфакторные производственные функции (ДПФ) характеризуют зависимость **результативной переменной** (например объема производства) от двух факторных переменных. Основными **факторными переменными**, используемыми в ДПФ, являются переменные объема основного капитала и трудовых ресурсов. Наиболее известными ДПФ являются производственные функции Кобба—Дугласа и Солоу.

При интерпретации параметров ОПД важную роль играет коэффициент эластичности. Общая формула расчета коэффициента эластичности следующая:

$$\varepsilon = f'(x) \cdot \frac{x}{y}$$

где $f'(x)$ — первая производная, характеризующая соотношение приростов результата и фактора для соответствующей формы связи.

При этом для линейной функции $\varepsilon = b \cdot x/y$.

В силу того, что коэффициент эластичности для линейной функции не является величиной постоянной, а зависит от соответствующего значения x , то часто рассчитываются **средний показатель эластичности**:

$$\varepsilon = f'(x) \cdot \frac{\bar{x}}{\bar{y}}$$

где $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — средние значения фактора и результата.

Многофакторные производственные функции (МПФ) характеризуют зависимость **результативной переменной** (объема производства) от n -го количества факторных переменных.

Общий вид многофакторной производственной функции:

$$y = f(x_i),$$

где y — результативная переменная объема производства;

x_i — факторные переменные, $i = 1, 2, \dots, n$.

МПФ характеризуются рядом расчетных показателей:

1. Показатель средней производительности (эффективности, отдачи) i -ой факторной переменной при постоянных значениях всех остальных факторных переменных:

$$Y/x_i = f(x_1, x_2, \dots, x_n) / x_i, \text{ т.е. по сути частное уравнение регрессии.}$$

Для линейной функции в качестве средней производительности выступают b_i коэффициенты при каждом факторе i .

2. Предельная производительность (эффективность, отдача) i -ой факторной переменной — это частная производная многофакторной производственной функции по факторной переменной i :

$$Y'_{xi} = f'(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Предельная производительность характеризует приращение объема производства на единицу приращения i -ой факторной переменной.

Частная производная второго порядка многофакторной производственной функции по факторной переменной x_i характеризует изменение показателя предельной производительности с изменением значения i -ой факторной переменной при постоянных значениях остальных факторных переменных:

$$Y''_{xi xi} = f''_{xi xi}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Если $y'' > 0$, то показатель предельной производительности увеличивается с увеличением значения i -ой факторной переменной.

Если $y'' = 0$, то можно рассчитать такое значение i -ой факторной переменной, при которой показатель предельной производительности будет или минимальным, или максимальным.

3. Коэффициент частной эластичности i -ой факторной переменной для многофакторной производственной функции:

$\varepsilon_{yxi} = f'_{xi}(x_1, x_2, \dots, x_p) * x_i / y$, где $f'_{xi}(x_1, x_2, \dots, x_p)$ — частная производная по переменной x_i .

В отличие от парной регрессии частные уравнения регрессии характеризуют изолированное влияние фактора на результат, ибо другие факторы закреплены на неизменном уровне. Эффекты влияния других факторов присоединены в них к свободному члену уравнения множественной регрессии. Это позволяет на осно-

вании частных уравнений регрессии определять **частные коэффициенты эластичности в линейной форме**:

$$\mathcal{E}_{y_{xi}} = b_i \cdot \frac{x_i}{y_{x_i / x_1 x_2 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_p}},$$

где b_i – коэффициенты регрессии для фактора x_i в линейном уравнении множественной регрессии; $y_{x_i / x_1 x_2 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_p}$ – частное уравнение регрессии.

4. Показатель предельной нормы замещения i-ой факторной переменной j-ой факторной переменной рассчитывается как взятое со знаком минус отношение показателей предельных производительностей i-ой и j-ой факторных переменных:

$$H_{ij} = - y'_{xi} / y'_{xj}$$

Пример 1. Предположим по группе сельхозпредприятий, специализирующихся на производстве молока, рассматривается однофакторная производственная функция линейного вида.

№ предприятия	Уровень производства молока, тыс.тонн, у	Затраты на производство, млн. руб., х
1	1	3
2	2	7
3	4	15
4	3	10
5	5	17
6	3	10
7	4	15

Задание. Построить уравнение производственной функции, дать его экономическую интерпретацию. Оценить степень тесноты связи между у и х.

Решение. Исходные данные и показатели для расчета оценок параметров а и b сгруппируем в таблице.

№ предприятия	Уровень производства молока, тыс.тонн, у	Затраты на производство, млн. руб., х	ух	у ²	х ²	у _х
1	1	3	3	1	9	1,01

2	2	7	14	4	49	2,08
3	4	15	60	16	225	4,21
4	3	10	30	9	100	2,88
5	5	17	85	25	289	4,74
6	3	10	30	9	100	2,88
7	4	15	60	16	225	4,21
Итого	22	77	282	80	997	22

Система нормальных уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} 7 \cdot a + 77 \cdot b = 22, \\ 77 \cdot a + 997 \cdot b = 282. \end{cases}$$

Решая ее, получим: $a = 0,21$; $b = 0,267$. Этот же результат можно было получить, используя уже готовые формулы для a и b . Получим следующее уравнение регрессии: $y_x = 0,21 + 0,267x$.

Полученная модель показывает, что при росте затрат на 1 млн. руб. уровень производства молока в среднем растет на 267 тонн.

Подставив в уравнение значения x , найдем теоретические значения y_x . В данном случае величина параметра a не имеет экономического смысла. В рассматриваемом примере имеем: $\bar{y} = 3,14$; $\bar{x} = 11,0$. Среднеквадратическое отклонение σ и коэффициент вариации V для x и y будут:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}} = 4,63; \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum (y - \bar{y})^2}{n}} = 1,25$$

$$V_x = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} \cdot 100\% = 42,1; \quad V_y = 39,8\%$$

То, что $a > 0$, соответствует опережению изменения фактора над изменением результата. Это подтверждает неравенство: $V_x > V_y$.

Найдем линейный коэффициент корреляции:

$$r_{xy} = b \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 0,267 \frac{4,63}{1,25} = 0,991.$$

Полученное значение достаточно близко к 1 и по шкале Чеддока означает, что связь между изучаемыми признаками очень сильная. Таким образом, в нашем примере наблюдается очень тесная зависимость между производством молочной продукции и затратами на ее получение.

Коэффициент детерминации равен 0,982. Следовательно, уравнением регрессии объясняется 98,2% дисперсии результативного признака, а на долю прочих факторов приходится лишь 1,8% ее дисперсии (т.е. остаточная дисперсия). Чем больше доля объясненной вариации, тем соответственно меньше роль прочих факторов, и, следовательно, линейная модель хорошо аппроксимирует исходные данные, ей можно воспользоваться для прогноза значений результативного признака.

Так, полагая, что уровень производственных затрат предприятия может составить 6 млн. руб., прогнозное значение объема молочной продукции будет находиться на уровне окажется 1,8 тыс. тонн.

Пример 2. Имеются данные об изменении фондоемкости продукции и удельного веса активной части основных фондов предприятий региона, представленные в таблице.

№	Фондоемкость, руб., x_0	Удельный вес активной части основных фондов, %, x_1
1	22,49	9,7
2	20,71	10,5
3	18,83	11,6
4	17,26	12,1
5	18,10	12,2
6	16,33	13,2
7	15,18	13,4
8	16,30	13,8
9	13,30	16,2
10	12,28	17,1
11	11,53	17,6
12	10,70	18,5
13	8,81	22,1

Задание.

1. Найти параметры производственной функции в форме гиперболы.
2. Рассчитать средний коэффициент эластичности.
3. Сделать точечный прогноз фондоемкости продукции при запланированном

удельном весе активной части основных фондов на уровне 15%.

Решение.

№	Фон- доем- кость, руб., x_0	Удельный вес ак- тивной части ос- новных фон- дов, %, x_1	расчетные величины			
			$z=1/x_0$	zx_1	x_1^2	z^2
1	22,49	9,7	0,0445	0,431	94,09	0,0020
2	20,71	10,5	0,0483	0,507	110,25	0,0023
3	18,83	11,6	0,0531	0,616	134,56	0,0028
4	17,26	12,1	0,0579	0,701	146,41	0,0034
5	18,10	12,2	0,0552	0,674	148,84	0,0031
6	16,33	13,2	0,0612	0,808	174,24	0,0037
7	15,18	13,4	0,0659	0,883	179,56	0,0043
8	16,30	13,8	0,0613	0,847	190,44	0,0038
9	13,30	16,2	0,0752	1,218	262,44	0,0057
10	12,28	17,1	0,0814	1,393	292,41	0,0066
11	11,53	17,6	0,0867	1,526	309,76	0,0075
12	10,70	18,5	0,0935	1,729	342,25	0,0087
13	8,81	22,1	0,1135	2,509	488,41	0,0129
Итого	201,85	188	0,8978	13,842	2873,66	0,0668

При анализе нелинейных связей между признаками особое значение приобретают выбор и обоснование типа уравнения, которое наиболее полно отразит имеющуюся связь. Фондоемкость и доля активной части основных фондов – два показателя, имеющие устойчивые связи, изменяются в большинстве случаев нелинейно. Таким образом, форма связи изменения фондоемкости в зависимости от меняющегося удельного веса активной части (оборудования) позволяет предполагать, что подходящим может быть следующее математическое уравнение:

$$x_0 = \frac{1}{a + bx_1}$$

Рассмотрим предложенное выше уравнение. Предварительно проведем преобразования, т.е. $x_0 = \frac{1}{a + bx_1}$, заменим $\frac{1}{x_0} = a + bx_1$.

Для упрощения обозначим $\frac{1}{x_0} = z$. тогда уравнение можно записать как

$$z = a + bx_1.$$

Фактически получено уравнение прямолинейной зависимости, для решения которого составим систему из двух нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \sum z = na + b \sum x_1 \\ \sum zx_1 = a \sum x_1 + b \sum x_1^2 \end{cases}$$

Определив в таблице $z = \frac{1}{x_0}$, $\sum z$, $\sum x_0$, $\sum x_1$, $\sum x_1^2$, а также и $\sum z^2$, подста-

вим полученные величины в уравнения:

$$\begin{cases} 0,8978 = 13a + 188b \\ 13,842 = 188a + 2873,66 \end{cases}$$

После решения системы получим $z = -0,011 + 0,0055x_1$, но поскольку $z = 1/x_0$, а соответственно $x_0 = 1/z$, то в конечном виде уравнение, выражающее связь между долей активной части фондов и фондоемкостью продукции, будет следующим:

$$x_0 = \frac{1}{a + bx_1} = \frac{1}{-0,011 + 0,0055x_1}$$

Следовательно, повышение удельного веса активной части основных фондов на x_1 единицу приведет к снижению фондоемкости на $\frac{1}{-0,011 + 0,0055x_1}$ руб.

В отличие от прямолинейной зависимости здесь уже нельзя указать, каким будет снижение фондоемкости на 1% роста активной части основных фондов, так как темп снижения фондоемкости при различном уровне удельного веса оборудования будет неодинаковым. Например, при удельном веса $x_1 = 9,5\%$ и $x_2 = 10,5\%$, вычисленная по уравнению фондоемкость продукции составит:

при $x_1 = 9,5\%$ будет $x_0 = 1/(-0,011 + 0,0055 \cdot 9,5) = 27,40$ руб.

при $x_2 = 10,5\%$ будет $x_0 = 1/(-0,011 + 0,0055 \cdot 10,5) = 21,16$ руб.

То есть снижение фондоемкости при росте удельного веса активной части фондов на 1% (с 9,5 до 10,5 ц с га) составит 6 руб. 24 коп. (27,40-21,16).

Для нахождения среднего коэффициента эластичности определяем средние значения признаков и производную $f'(x_1)$ гиперболы: $x_0 = 15,52$, $x_1 = 14,46$,

$$f''(x_1) = -\frac{1}{(a + bx_1)^2} \cdot b$$

Теперь вычислим средний коэффициент эластичности для нашего уравнения:

$$\varepsilon = f'(x_1) \cdot \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_0} = \frac{-1}{-0,011 + 0,0055 \cdot 14,46} \cdot 0,0055 \cdot \frac{14,46}{15,52} = -0,075$$

Это означает, что с увеличением удельного веса на 1% от его среднего уровня фондоемкость продукции снижается на 0,075 руб. от своего среднего уровня.

Для определения прогнозного значения фондоемкости продукции следует предполагаемое значение удельного веса активной части основных фондов подставить в уравнение регрессии: при $x_1=15\%$ будет $x_0=1/(-0,011+0,0055*9,5)=14$ руб.

Таким образом, прогнозное значение фондоемкости продукции при плановой доли оборудования в общей стоимости основных фондов равной 15% составит 14 рублей.

ГЛАВА 2. ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ КОББА-ДУГЛАСА

Американские ученые Д. Кобб и П. Дугла считаются основоположниками теории производственных функций. Они разработали производственную функцию, названную впоследствии **производственной функцией Кобба—Дугласа**.

Общий вид производственной функции Кобба-Дугласа:

$$y = ax_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_m^{b_m}$$

где a – числовой параметр ПФ, x_i – факторная переменная ПФ, b_i – показатель степени i -ой факторной переменной ПФ.

В соответствии с определением коэффициента эластичности параметры b_i имеют четкий экономический смысл.

b_i — параметр, являющийся эластичностью количества продукции (результата деятельности) по отношению к количеству соответствующих производственных факторов. В производственной функции вида $y = ax_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_m^{b_m}$ экономический смысл имеют не только коэффициенты b_i каждого фактора, но и их сумма, т.е. **сумма эластичностей**: $V = b_1 + \dots + b_m$. Эта величина фиксирует обобщенную характеристику эластичности производства.

Коэффициент эластичности, естественно, можно определять и при наличии других форм связи, но только для степенной функции он представляет собой постоянную величину, равную параметру b . В других функциях коэффициент эластичности зависит от значений фактора x . **Коэффициент эластичности** показывает, на сколько процентов изменится в среднем результат, если фактор изменится на 1% при неизменности других факторов (в многофакторной производственной функции).

Двухфакторная производственная функция Кобба-Дугласа имеет вид:

$$V = a * K^{\alpha} * L^{\beta}$$

где V – (результативная переменная) объем выпущенной продукции в стоимостном или натуральном выражении,

K – (факторная переменная) объем основного капитала или основных фондов,

L – (факторная переменная) объем трудовых ресурсов (кол-во работников)

или трудовых затрат (чел-дни, чел-час и т.д.).

условия $a > 0$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $\alpha + \beta = 1$

Параметр a зависит от единиц измерения результативной и факторных переменных.

На основании последнего условия двухфакторную ПФ Кобба-Дугласа можно записать:

$$V = a * K^{\alpha} * L^{1-\alpha}$$

Ограничения функции Кобба-Дугласа:

1. $V'_K = dV/dK > 0$
2. $V'_L = dV/dL > 0$
3. $V''_{KK} = d^2V/dK^2 < 0$
4. $V''_{LL} = d^2V/dL^2 < 0$
5. $K > 0, L > 0$

Первое и второе ограничения означают, что результативная переменная (объем выпускаемой продукции) увеличивается при росте одной факторной переменной и постоянном значении второй факторной переменной. Третье и четвертое ограничения означают, что последовательное увеличение одной факторной переменной при постоянном значении второй факторной переменной будет приводить к сокращению прироста значения результативной переменной.

Частный коэффициент эластичности для K равен α , а для L равен β , т.е. частные коэффициенты эластичности функции Кобба—Дугласа являются независимыми от переменных K и L . Они показывают изменение y в процентах при изменении на 1% фактора, если K или L постоянен.

Коэффициент средней производительности труда функции Кобба—Дугласа:

$$b_1 = V/L = a * K^{\alpha} * L^{\beta-1}$$

Коэффициент средней фондоотдачи функции Кобба—Дугласа:

$$b_2 = V/K = a * K^{\alpha-1} * L^{\beta}$$

Коэффициент предельной производительности труда:

$$V'_L = dV/dL = \beta * a * K^{\alpha} * L^{\beta-1} = \beta * b_1$$

Коэффициент предельной фондоотдачи:

$$V'_K = dV/dK = \alpha * a * K^{\alpha-1} * L^{\beta} = \alpha * b_2$$

Показатель предельной фондоотдачи пропорционален показателю средней производительности, но всегда меньше его величины, так как $0 < \alpha < 1$. Аналогично можно сделать вывод о предельной производительности труда.

Коэффициент предельной нормы технической замены факторных переменных (замена труда капиталом) ПФ Кобба-Дугласа:

$$W = V_{KL} = - V'_L / V'_K$$

ПФ Кобба-Дугласа является нелинейной по параметрам, но может быть сведена к линейному виду. Оценка параметров проводится линеризацией функции, а потом с помощью МНК.

Параметры уравнения множественной регрессии оцениваются, как и в парной регрессии, методом наименьших квадратов (МНК):

$$\begin{cases} n \cdot a + b_1 \sum x_1 + b_2 \cdot \sum x_2 + \dots + b_n \cdot \sum x_n = \sum y, \\ a \cdot \sum x_1 + b_1 \cdot \sum x_1^2 + b_2 \cdot \sum x_2 \cdot x_1 + \dots + b_n \cdot \sum x_n \cdot x_1 = \sum y \cdot x_1, \\ \dots \\ a \cdot \sum x_n + b_1 \cdot \sum x_1 \cdot x_n + b_2 \cdot \sum x_2 \cdot x_n + \dots + b_n \cdot \sum x_n^2 = \sum y \cdot x_n. \end{cases} \quad (2.4.)$$

Для ее решения можно применить обычный метод подстановок или использовать методом определителей.

Эффект от масштаба производства (для двухфакторной производственной функции) — это изменение объема произведенной продукции при пропорциональном изменении затрат труда и капитала.

Предположим, что изменение объема основного капитала равно nK , а увеличение объема трудовых затрат равно nL . Определим изменение объема производства для функции двухфакторной производственной Кобба—Дугласа:

$$V(n) = a * K^{\alpha} * L^{\beta} * n^{\alpha+\beta} = V * n^{\alpha+\beta}$$

Функция Кобба—Дугласа имеет **возрастающий эффект от масштабов производства**, если $(\alpha + \beta) > 1$, т.е. с увеличением факторных переменных K и L в n раз объем производства O возрастает в $n^{\alpha+\beta}$ раз.

Функция Кобба—Дугласа имеет **фиксированный эффект от масштабов**

производства, если $(\alpha+\beta) = 1$, т.е. с увеличением факторных переменных K и L в n раз объем производства O также возрастает в n раз.

Функция Кобба—Дугласа имеет **убывающий эффект от масштабов производства**, если $(\alpha+\beta) < 1$, т.е. с увеличением факторных переменных K и L в n раз объем производства O возрастает меньшими, чем n , темпами.

Пример 1. В таблице представлены данные по ряду экономических районов Смоленской области о размерах валовой продукции, стоимости производственных фондов и численности работников.

№	Валовая продукция, млн. руб.	Основные производственные фонды, млн. руб.	Численность работников сферы материального производства, чел.
1	1110	1604	970
2	1289	1725	981
3	1443	1855	1003
4	1652	1994	1028
5	1793	2144	1080
6	1997	2305	1091
7	2091	2408	1116
8	2068	2673	1136
9	2344	2879	1136
10	2602	3089	1167
11	2820	3522	1205
12	2816	3816	1223

Задание.

1. Постройте производственную функцию Кобба-Дугласа.
2. Оцените его значимость через F-критерий Фишера и определите коэффициент эластичности.
3. Рассчитайте коэффициенты среднюю производительности и фондоотдачи при

уровне основных фондов 3000 млн.руб. и численности работников 1000 чел.

4. Определите коэффициенты предельной производительности и фондоотдачи.

5. Определите какой эффект масштаба имеет данная функция.

Решение. В качестве зависимой переменной следует выбрать валовую продукцию (y) как результативный показатель хозяйственной деятельности, а ресурсы производства (основные фонды, трудовые ресурсы) выступают в роли влияющих факторов. Такого рода зависимости в практике исследований выражаются уравнением производственной функции Кобба-Дугласа. В нашем случае оно примет вид:
 $y = a \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2}$.

Для нахождения его параметров следует вначале прологарифмировать его:
 $\lg y = \lg a + b_1 \lg x_1 + b_2 \lg x_2$. Обозначим $k_0 = \lg y$, $k_1 = \lg x_1$, $k_2 = \lg x_2$, $a_0 = \lg a$. В результате получим $k_0 = a_0 + b_1 k_1 + b_2 k_2$. По форме получено линейное уравнение для трех переменных. Для определения параметров составим систему нормальных уравнений на основе МНК:

$$\begin{cases} n \cdot a_0 + b_1 \sum k_1 + b_2 \cdot \sum k_2 = \sum k_0, \\ a \cdot \sum k_1 + b_1 \cdot \sum k_1^2 + b_2 \cdot \sum k_2 \cdot k_1 = \sum k_0 \cdot k_1, \\ a \cdot \sum k_2 + b_1 \cdot \sum k_1 \cdot k_2 + b_2 \cdot \sum k_2^2 = \sum k_0 \cdot k_2. \end{cases}$$

Логарифмы анализируемых показателей, а также производные величины занесем в отдельную таблицу:

№	k_0	k_1	k_2	k_1^2	k_2^2	k_0^2	$k_1 k_2$	$k_0 k_1$	$k_0 k_2$
1	3,045	3,205	2,987	10,273	8,921	9,274	9,573	9,761	9,096
2	3,110	3,237	2,992	10,477	8,950	9,674	9,683	10,067	9,305
3	3,159	3,268	3,001	10,682	9,008	9,981	9,809	10,326	9,482
4	3,218	3,300	3,012	10,888	9,072	10,356	9,939	10,619	9,693
5	3,254	3,331	3,033	11,097	9,202	10,586	10,105	10,838	9,869
6	3,300	3,363	3,038	11,308	9,228	10,892	10,215	11,098	10,026
7	3,320	3,382	3,048	11,436	9,288	11,025	10,306	11,228	10,119
8	3,316	3,427	3,055	11,744	9,335	10,993	10,471	11,362	10,130
9	3,37	3,45	3,05	11,9	9,33	11,3	10,5	11,6	10,2

	0	9	5	66	5	57	69	57	96
10	3,41 5	3,49 0	3,06 7	12,1 79	9,40 7	11,6 64	10,7 04	11,9 19	10,4 75
11	3,45 0	3,54 7	3,08 1	12,5 80	9,49 2	11,9 04	10,9 28	12,2 37	10,6 30
12	3,45 0	3,58 2	3,08 7	12,8 28	9,53 2	11,9 00	11,0 58	12,3 55	10,6 50
Сум ма	39,4 08	40,5 90	36,4 57	137, 458	110, 771	129, 605	123, 360	133, 468	119, 772

Подставим соответствующие значения в систему уравнений:

$$\begin{cases} 39,408=12a_0+40,59b_1+36,457b_2, \\ 133,468=40,59a_0+137,458b_1+123,36b_2, \\ 119,772=36,457a_0+123,36b_1+110,771b_2. \end{cases}$$

Решая уравнения, получим $k_0=-6,732+0,215k_1+3,058k_2$.

Для осуществления перехода к начальному уравнению потенцируем по основанию 10:

$$y_{x1x2}=10^{-6,732}x_1^{0,215}x_2^{3,058}, \text{ откуда}$$

$$y_{x1x2}=1,85 \cdot 10^{-7} \cdot x_1^{0,215}x_2^{3,058}.$$

Полученные коэффициенты регрессии определяют относительный прирост валовой продукции на единицу прироста каждого из факторов.

2. В степенной функции коэффициент эластичности постоянен и равен коэффициенту регрессии, поэтому $\mathcal{E}_{x1}=b_1=0,215$, $\mathcal{E}_{x2}=b_2=3,058$.

При изменении объемов производства валовой продукции в большей степени оказывает влияние численность трудовых ресурсов, гораздо в меньшей степени – основные производственные фонды. Так, с увеличением численности работников на 1% валовая продукция растет в среднем на 3,06% при фиксированном значении основных фондов, а рост обеспеченности производственными фондами на 1% дает прирост валовой продукции на 0,22% при неизменной численности трудовых ресурсов.

Чтобы проверить значимость построенного уравнения регрессии вычислим индекс корреляции по формуле:

$$R_{yx} = \sqrt{1 - \frac{\sum (y - \text{anti log}(\lg y_{x1x2}))^2}{\sum (y - \bar{y})^2}}$$

После вычисления производных показателей получим:

$$R = \sqrt{1 - \frac{119194}{3603681}} = 0,983$$

Индекс корреляции говорит о наличии сильной корреляционной связи между изучаемыми признаками. Значимость уравнения проверим с помощью F-критерия Фишера:

$$F_{\text{факт}} = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n - m - 1}{m} = \frac{0,966}{1 - 0,966} \cdot (12 - 1 - 1) = 284$$

№	$\lg y_{x1x2}$	antilog ($\lg y_{x1x2}$)	$[\lg y_{x1x2} - \text{antilog}(\lg y_{x1x2})]^2$	$(y - \bar{y})^2$
1	3,089	1227	13791	795813
2	3,111	1291	2	508488
3	3,147	1403	1615	312574
4	3,186	1536	13414	122558
5	3,259	1814	459	43716
6	3,279	1901	9234	26
7	3,313	2056	1190	7906
8	3,346	2221	23280	4345
9	3,353	2256	7688	116907
10	3,396	2487	13159	359900
11	3,451	2822	3	668988
12	3,478	3004	35357	662460
Сумма	39,408	24019	119194	3603681

Определим критическое значения критерия по таблице при $k_1=1$, $k_2=10$ и уровне значимости $\alpha=0,05$. Оно равно 4,96. Так как $F_{\text{факт}} > F_{\text{кр}}$, то гипотезу H_0 о случайном характере связи отклоняем с вероятностью 95%. Уравнение регрессии статистически значимо.

3. Рассчитаем коэффициент средней производительности труда функции Кобба—Дугласа при соответствующих значениях x_1 и x_2 :

$$b_1 = V/L = a \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta-1} = 1,85 \cdot 10^{-7} \cdot 3000^{0,215} 1000^{3,058-1} = 1,54$$

Соответственно коэффициент средней фондоотдачи функции Кобба—Дугласа:

$$b_2 = V/K = a \cdot K^{\alpha-1} \cdot L^{\beta} = 1,85 \cdot 10^{-7} \cdot 3000^{0,215-1} 1000^{3,058} = 0,51$$

Таким образом, средняя производительность труда составит 1,54 млн. руб./чел., а средняя фондоотдача при данных производственных условиях 0,51 руб.

4. Коэффициент предельной производительности труда:

$$V'_L = dV/dL = \beta \cdot a \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta-1} = \beta \cdot b_1 = 3,058 \cdot 1,54 = 4,7$$

Коэффициент предельной фондоотдачи:

$$V'_K = dV/dK = \alpha \cdot a \cdot K^{\alpha-1} \cdot L^{\beta} = \alpha \cdot b_2 = 0,215 \cdot 0,51 = 0,11$$

Показатель предельной производительности труда выше среднего уровня, что говорит о целесообразности вовлечения в производства дополнительной рабочей силы. Предельная фондоотдачи ниже среднего уровня, что предполагает неэффективность приращения основных средств в сравнении с трудовыми ресурсами, этот ресурс является менее дефицитным.

5. Если бы только трудовые ресурсы и основные фонды определяли величину валовой продукции и темпы роста всех трех переменных (y_1, x_1, x_2) за изучаемый период были неизменны, то сумма b_1 и b_2 была бы равна единице. В рассматриваемом примере это не наблюдается. Действительно, если сопоставить данные последнего значения с начальным, то валовая продукция по всей совокупности возрастает на 254%, фонды – на 238%, а число работников – на 126%. Поскольку темп роста валового дохода превосходит темпы роста факторов его определяющих, то сумма b_1 и b_2 превышает единицу. Если бы темп роста валовой продукции были ниже, чем темп роста факторов x_1 и x_2 , то сумма b_1 и b_2 оказалось бы меньше единицы. следовательно уравнение $y = a \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2}$ позволяет рассматривать коэффициенты регрессии b_1 и b_2 как показатели, при помощи которых оценивается эффективность факторов, участвующих в создании валовой продукции. При этом данная функция Кобба—Дугласа имеет возрастающий эффект от масштабов производства, так как $(\alpha + \beta) = 3,273 > 1$, т.е. с увеличением факторных переменных x_1 и x_2

в n раз объем производства y возрастает в $n^{3,3}$ раз.

ГЛАВА 3. ДВУХФАКТОРНАЯ ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ СОЛОУ

В 1956 г. американский ученый *Р. Солоу* предложил разработанную им **двухфакторную производственную функцию** вида:

$$V=F(K,L)=a*[\alpha*K^{-p}+(1-\alpha)*L^{-p}]^{-1/p}$$

V – (результативная переменная) объем выпущенной продукции в стоимостном или натуральном выражении, K (факторная переменная) — объем основного капитала или основных фондов, L (факторная переменная) — объем трудовых ресурсов или затрат труда a, α, p — неизвестные технологические характеристики производственной функции, удовлетворяющие условиям: $a > 0; 0 \leq \alpha \leq 1; p > 0$

Для функции Солоу характерны определенные свойства, которые дают ряд преимуществ перед функцией Кобба-Дугласа:

1. Для функции Солоу является справедливым правило эффекта от масштаба производства, т. е. она является однородной относительно переменных. Для производственной функции Солоу применяется **эффект от масштаба производства**, т.е. изменение объема произведенной продукции при пропорциональном изменении затрат труда и капитала:

$$V(n)=a*n*[\alpha*K^{-p}+(1-\alpha)*L^{-p}]^{-1/p} = n*V$$

Данное выражение означает, что с увеличением факторных переменных K и L в n раз объем произведенной продукции V увеличивается в n раз (если $n > 1$). С уменьшением факторных переменных K и L в n раз объем произведенной продукции V уменьшается в n раз (если $0 < n < 1$)

2. Если факторную переменную объема основного капитала K приравнять к нулю, то изменение результативной переменной объема производства V будет линейно зависеть от изменения объема факторной переменной затрат труда L . Если факторную переменную затрат труда L приравнять к нулю, то изменение результативной переменной объема производства V будет линейно зависеть от изменения объема факторной переменной объема основного капитала K .

3. Если факторную переменную объема основного капитала K зафиксиро-

вать на уровне K_0 , то результативная переменная объема производства V будет возрастать с ростом факторной переменной затрат труда L . Следовательно, предельная производительность факторной переменной L всегда больше нуля. Если факторную переменную затрат труда L зафиксировать на уровне L_0 , то результативная переменная объема производства V будет возрастать с ростом факторной переменной объема основного капитала K . Следовательно, предельная производительность факторной переменной K всегда больше нуля.

1. Для определения технологических параметров функции Солоу α , p , α достаточно трех измерений переменных функции (основного капитала, трудовых затрат и объема производства).

2. Частный коэффициент эластичности функции Солоу по факторной переменной объема основного капитала K :

$$\Theta_K = V'_K * K / V = \alpha / a * (V/K)^p$$

3. Частный коэффициент эластичности функции Солоу по факторной переменной объема затрат труда L :

$$\Theta_L = V'_L * L / V = (1-\alpha) / a * (V/L)^p$$

Данная функция получила применение в модели Солоу - неоклассическая модель экономического роста, основанная на производственной функции Кобба — Дугласа с учётом экзогенного нейтрального технического прогресса как фактора экономического роста наравне с такими факторами производства, как труд и капитал.

В модели Солоу рассматривается производственная функция:

$$Y = F(K_t, N_t) = K^\alpha * N^{1-\alpha}$$

где K_t – капитал, N_t – труд.

В ней предполагается, что совокупный спрос изменяется в таком же размере, как и предложение, а число занятых тождественно равно численности населения (трудовых ресурсов).

Представим эту функцию в виде:

$$\frac{Y_t}{N_t} = \frac{K_t^\alpha N_t^{1-\alpha}}{N_t} = \left(\frac{K_t}{N_t}\right)^\alpha;$$

где $Y_t/N_t = y_t$ – производительность труда (выпуск/доход на душу населения);
 $K_t/N_t = k_t$ – капиталовооруженность труда (капитал на душу населения).

Таким образом, в модели Солоу средняя производительность труда есть функция его капиталовооруженности. При этом объем используемого в каждом периоде капитала можно представить в виде произведения капиталовооруженности труда на число занятых.

Условием равновесного роста в модели Солоу является равенство сбережений и инвестиций. Тогда получим уравнение:

$$\frac{dk_t}{dt} = sy_t - nk_t.$$

где s – норма сбережений, n – темп прироста населения и предложения труда.

Данное выражение показывает, как во времени должна изменяться капиталовооруженность труда, чтобы равновесный рост, обеспечивающий полное использование производственных мощностей, сопровождался полной занятостью.

Поскольку y_t есть доход на одного занятого, то sy_t представляет объем осуществляемых им в период t сбережений, которые полностью инвестируются.

Спрос на инвестиции в период t определяется потребностью в дополнительном капитале для оснащения им вновь нанятых в этом периоде рабочих. Произведение $n \cdot k_t$ показывает, сколько в среднем требуется дополнительного капитала на одного работающего, чтобы капиталовооруженность вновь нанятых в период t рабочих равнялась k_t .

Следовательно, при $sy_t = nk_t$ будет происходить равновесный рост с постоянной капиталовооруженностью и постоянной производительностью труда (золотое правило). Такое состояние экономики называют стационарным, поскольку сбережений хватает только для того, чтобы обеспечить новых работников капиталом.

Когда $sy_t > nk_t$, объем сбережений превышает объем инвестиций (дополнительного капитала), необходимый для оснащения используемого труда на уровне k_t . В данном случае для обеспечения равенства нужно перейти к более капиталоемкой технологии, то есть повысить k_t . Соответственно при $sy_t < nk_t$ для

сохранения равновесия и полной занятости приходится снижать капиталовооруженность труда.

Пример 1.

Производство национального дохода характеризуется производственной функцией $y_t = L_t^{0,5} K_t^{0,5}$. В периоде t_0 в хозяйственный оборот вовлечено 10 ед. труда и 360 ед. капитала. Темп прироста трудовых ресурсов равен 5% за период.

1. Какова должна быть норма сбережений в данной экономике, чтобы наблюдался равновесный рост в соответствии с моделью Солоу? Каков будет темп равновесного роста?

2. Какой объем капитала необходим в исходных условиях для равновесного роста при норме сбережений 50%?

Решение:

1. Условие равновесного роста в модели Солоу $sy = nk$. Капиталовооруженность труда в рассматриваемой экономике равна $k = K/L = 360 / 10 = 36$. Выпуск на одного работника равен $y = k^{0,5} = (36)^{0,5} = 6$. Отсюда $s = nk/y = 0,05*36/6 = 0,3$. Таким образом, норма сбережений в экономике, обеспечивающая равновесный рост должна быть равна 0,3, т.е. 30% необходимо направлять своих сбережений на инвестиции в производство.

Поскольку капиталовооруженность труда в условиях равновесного роста не меняется, то темп прироста объема используемого капитала равен темпу прироста населения. При заданной технологии с неизменным эффектом масштаба и при фиксированной норме сбережений это означает, что с таким же темпом будет расти и национальный доход. Значит темп равновесного роста будет равен темпу прироста населения $n = 5\%$.

2. Условие равновесного роста в модели Солоу $sy = nk$. При норме сбережений $s = 0,5$ капиталовооруженность труда должна составить $k = sy/n = 0,5k^{0,5} / 0,05$. Имеем уравнение:

$$0,5k^{0,5} = 0,05 k, \quad k = (0,5/0,05)^2. \text{ Отсюда } K = 10*(0,5/0,05)^2 = 1000 \text{ ед.}$$

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. Металлургический завод за последние 3 года характеризовался следующими показателями хозяйственной деятельности:

Год	Объем металла, тыс. тонн	Количество прессов, единиц	Численность работников, тыс. чел.
1	13	10	0,8
2	30	20	1,8
3	50	30	2,8

Задание. Построить производственную функцию Кобба-Дугласа, пояснить ее экономический смысл. Спрогнозировать объем металла в 4-й год, если запланировано довести количество прессов до 40 ед., численность работников до 3,5 тыс. чел.

Задача 2. Агрофирма за последние 3 года имела следующие показатели хозяйственной деятельности:

Год	Объем сбора зерна, тонн	Количество комбайнов, единиц	Численность работников, чел.
1	15	2	12
2	20	5	18
3	22	10	25

Задание. Построить производственную функцию Кобба-Дугласа, пояснить ее экономический смысл. Спрогнозировать объем сбора зерна в 4-й год, если запланировано довести количество комбайнов до 20 ед., численность работников до 35 чел.

Задача 3

В хозяйстве используется 256 ед. капитала и 16 ед. труда. Технология отображается производственной функцией $y_t = L_t^{0,5} K_t^{0,5}$. Норма сбережений равна 0,2.

Каков должен быть темп прироста предложения труда, чтобы в модели Солоу сохранилась существующая производительность труда?

Задача 4

В периоде t_0 в экономике имеется 625 ед. капитала и 16 ед. труда. Условия производства характеризуются производственной функцией $y_t = L_t^{0,75} K_t^{0,25}$. Темп прироста трудовых ресурсов равен 2% за период. Население сберегает 20% национального дохода. Основываясь на модели роста Солоу, необходимо определить:

1. как изменится средняя производительность капитала в периоде t_6 по сравнению с периодом t_0 ? Чем объясняется такое изменение, и каков предел, к которому стремится производительность капитала в данных условиях?
2. как изменится средняя производительность труда в периоде t_6 по сравнению с периодом t_0 , если в исходных условиях темп прироста трудовых ресурсов равен 5%? Чем объясняется такое изменение, и каков предел, к которому стремится производительность труда в данных условиях?

Задача 5

В периоде t_0 в экономике имеется 237 ед. капитала и 11 ед. труда. Условия производства представлены производственной функцией $y_t = L_t^{0,75} K_t^{0,25}$. Темп прироста трудовых ресурсов равен 2% за период. Население сберегает 20% национального дохода. Основываясь на модели роста Солоу, необходимо определить:

1. достигнуто ли в экономике динамическое равновесие;
2. соответствуют ли сбережения «золотому правилу накопления»;
3. динамику потребления на одного работающего до периода t_6 ;
4. какой объем капитала необходим в периоде t_0 , чтобы в экономике существовал устойчивый рост с полной занятостью при норме сбережений $s = 0,25$;
5. сравнить динамику потребления на одного работающего в условиях заданий «3» и «4».

Задача 6

Производство национального дохода отображается функцией $y_t = (1,02^t L_t)^{0,6} K_t^{0,4}$. Трудоспособное население в стране увеличивается на 3% за период. Экономика находится в динамическом равновесии при соблюдении «золотого правила» накопления.

На основе модели роста Солоу необходимо определить в периоде t_5 среднюю производительность реальной единицы труда, ее капиталовооруженность и среднюю норму потребления.

ГЛАВА 4. НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ СВЯЗИ. МОДЕЛИРОВАНИЕ СПРОСА И КАЧЕСТВА ПРОДУКЦИИ.

Статистические гипотезы

Полученные в экспериментах выборочные данные всегда ограничены и носят в значительной мере случайный характер. Именно поэтому для анализа таких данных и используется математическая статистика, позволяющая обобщать закономерности, полученные на выборке, и распространять их на всю генеральную совокупность.

Формулирование гипотез систематизирует предположения исследователя и представляет их в четком и лаконичном виде. Благодаря гипотезам исследователь не теряет путеводной нити в процессе расчетов и ему легко понять после их окончания, что, собственно, он обнаружил.

Подчеркнем еще раз, что полученные в результате эксперимента на какой-либо выборке данные служат основанием для суждения о генеральной совокупности. Однако в силу действия случайных вероятностных причин оценка параметров генеральной совокупности, сделанная на основании экспериментальных (выборочных) данных всегда будет сопровождаться погрешностью, и поэтому подобного рода оценки должны рассматриваться как предположительные, а не как окончательные утверждения. Подобные предположения о свойствах и параметрах генеральной совокупности получили название *статистических гипотез*.

Статистические гипотезы подразделяются на нулевые и альтернативные, направленные и ненаправленные.

Нулевая гипотеза - это гипотеза об отсутствии различий.

Она обозначается как H_0 называется нулевой потому, что содержит число 0: $X_1 - X_2 = 0$, где X_1, X_2 - сопоставляемые значения признаков.

Нулевая гипотеза - это то, что мы хотим опровергнуть, если перед нами стоит задача доказать значимость различий.

Альтернативная гипотеза - это гипотеза о значимости различий.

Она обозначается как H_1 . **Альтернативная гипотеза** - это то, что мы хотим доказать, поэтому иногда ее называют **экспериментальной** или **конкурирующей** гипотезой.

Бывают задачи, когда мы хотим доказать как раз незначимость различий, то есть подтвердить нулевую гипотезу. Например, если нам нужно убедиться, что разные испытуемые получают хотя и различные, но уравновешенные по трудности задания, результаты будут одинаковыми. Или что экспериментальная и контрольная выборки не различаются между собой по каким-то значимым характеристикам. Однако чаще нам все-таки требуется доказать значимость **различий**, ибо они более информативны для нас в поиске нового. Нулевая и альтернативная гипотезы могут быть направленными и ненаправленными.

Направленные гипотезы

H_0 : X_1 не превышает X_2

H_1 : X_1 превышает X_2

Ненаправленные гипотезы H_0 : X_1 не отличается от X_2 H_1 : X_1 отличается от X_2

Если вы заметили, что в одной из групп индивидуальные значения испытуемых по какому-либо признаку, например по социальной смелости, выше, а в другой ниже, то для проверки значимости этих различий нам необходимо сформулировать направленные гипотезы.

Если мы хотим доказать, что в группе А под влиянием каких-то экспериментальных воздействия произошли более выраженные изменения, чем в группе Б, то нам тоже необходимо сформулировать направленные гипотезы.

Если же мы хотим доказать, что различаются формы распределения признака в группе А и Б, то формулируются ненаправленные гипотезы.

При описании каждого критерия даны формулировки гипотез, которые он помогает нам проверить.

Построим схему - классификацию статистических гипотез.

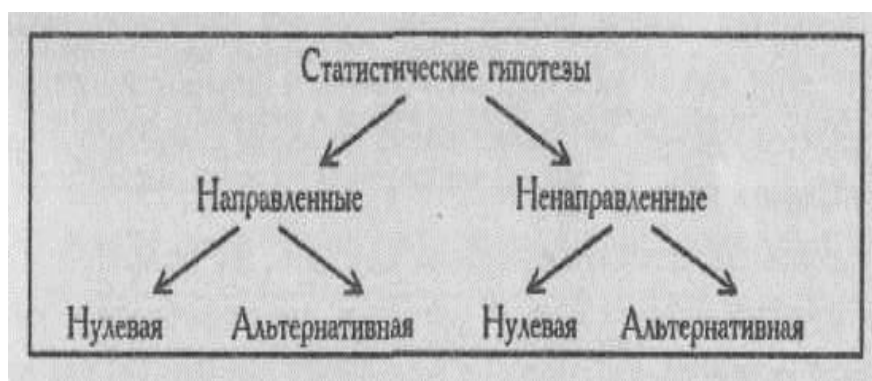


Рис. 1. Статистические гипотезы

Проверка гипотез осуществляется с помощью критериев статистической оценки различий.

3. Статистические критерии

Статистический критерий - это решающее правило, обеспечивающее надежное поведение, то есть принятие истинной и отклонение ложной гипотезы с высокой вероятностью.

Статистические критерии обозначают также метод расчета определенного числа и само это число.

Когда мы говорим, что достоверность различий определялась по критерию χ^2 , то имеем в виду, что использовали метод χ^2 для расчета определенного числа.

Когда мы говорим, далее, что $\chi^2 = 12,676$, то имеем в виду определенное число, рассчитанное, например, по методу χ^2 . Это число обозначается как эмпирическое значение критерия.

По соотношению эмпирического и критического значений критерия мы можем судить о том, подтверждается ли или опровергается нулевая гипотеза. Например, если $\chi^2_{\text{эмп}} > \chi^2_{\text{кр.}}$, то H_0 отвергается.

В большинстве случаев для того, чтобы мы признали различия значимыми, необходимо, чтобы эмпирическое значение критерия превышало критическое, хотя есть критерии (например, критерий Манна-Уитни или критерий знаков), в которых мы должны придерживаться противоположного правила.

Эти правила оговариваются в описании каждого из представленных в руководстве критериев.

В некоторых случаях расчетная формула критерия включает в себя количество наблюдений в исследуемой выборке, обозначаемое как n . В этом случае эмпирическое значение критерия одновременно является тестом для проверки статистических гипотез.

Как уже отмечалось, при компьютерной обработке мы сразу получаем уровни статистической значимости, выраженные в интервале от 0 до 1,0. При этом полученные результаты корреспондируют с осями значимости Ю приведенными ниже.

В случае ручной обработки во всех пособиях по математическим методам и математической статистике приведен ряд таблиц применительно к конкретным критериям. В этом случае по специальной таблице мы определяем, какому уровню статистической значимости различий соответствует данная эмпирическая величина. Примером такого критерия является критерий χ^2 , вычисляемый на основе углового преобразования Фишера.

В большинстве случаев, однако, одно и то же эмпирическое значение критерия может оказаться значимым или незначимым в зависимости от количества наблюдений в исследуемой выборке (n) или от так называемого количества степеней свободы, которое обозначается как v или как df .

Число степеней свободы V равно числу классов вариационного ряда минус число условий, при которых он был сформирован. К числу таких условий относятся объем выборки(n), средние и дисперсии.

Если мы расклассифицировали наблюдения по классам какой-либо номинальной шкалы и подсчитали количество наблюдений в каждой ячейке классификации, то мы получаем так называемый частотный вариационный ряд. Единственное условие, которое соблюдается при его формировании - объем выборки n . Допустим, у нас 3 класса: "Умеет работать на компьютере - умеет выполнять лишь определенные операции - не умеет работать на компьютере". Выборка состоит из 50 человек. Если в первый класс отнесены 20 испытуемых, во второй - тоже 20, то в третьем классе должны оказаться все остальные 10 испытуемых. Мы ограничены одним условием - объемом выборки. Поэтому даже если мы потеряли

данные о том, сколько человек не умеют работать на компьютере, мы можем определить это, зная, что в первом и втором классах - по 20 испытуемых. Мы не свободны в определении количества испытуемых в третьем- разряде, "свобода" простирается только на первые две ячейки классификации:

$$V=c-l=3-1=2$$

Аналогичным образом, если бы у нас была классификация из 10 разрядов, то мы были бы свободны только в 9 из них, если бы у нас было 100 классов - то в 99 из них и т. д.

Способы более сложного подсчета числа степеней свободы при двухмерных классификациях приведены в разделах, посвященных критерию χ^2 и дисперсионному анализу.

Зная *n* и/или число степеней свободы, мы *по специальным таблицам* можем определить критические значения критерия и сопоставить с ними полученное эмпирическое значение. Обычно это записывается так: "при $n=22$ критические значения критерия составляют ..." или "при $v=2$ критические значения критерия составляют ..." и т.п.

Критерии делятся на параметрические и непараметрические.

Параметрические критерии

Критерии, включающие в формулу расчета параметры распределения, то есть средние и дисперсии (t-критерий Стьюдента, критерий Фи др.).

Непараметрические критерии

Критерии, не включающие в формулу расчета параметров распределения и основанные на оперировании частотами или рангами (критерий Q-Розенбаума, критерий Т- Вилкоксона и др.)

И те, и другие критерии имеют свои преимущества и недостатки. На основании нескольких руководств можно составить таблицу, позволяющую оценить возможности и ограничения тех и других.

Возможности и ограничения параметрических и непараметрических критериев

Параметрические критерии

1. Позволяют прямо оценить различия в средних, полученных в двух выборках (t- критерий Стьюдента).
2. Позволяют прямо оценить различия в дисперсиях (критерий Фишера).
3. Позволяют выявить тенденции изменения признака при переходе от условия к условию (дисперсионный однофакторный анализ), но лишь при условии нормального распределения признака.
4. Позволяют оценить взаимодействие двух и более факторов в их влиянии на изменения признака (двухфакторный дисперсионный анализ).
5. Экспериментальные данные должны отвечать двум, а иногда трем, условиям:
 - а) значения признака измерены по интервальной шкале;
 - б) распределение признака является нормальным;
 - в) в дисперсионном анализе должно соблюдаться требование равенства дисперсий в ячейках комплекса.
6. Математические расчеты довольно сложны.
7. Если условия, перечисленные в п.5, выполняются, параметрические критерии оказываются несколько более мощными, чем непараметрические.

Непараметрические критерии

1. Позволяют оценить лишь средние тенденции, например, ответить на вопрос, чаще ли в выборке А встречаются более высокие, а в выборке Б - более низкие значения признака (критерии Q,U, ϕ^* и др.).
- 2.Позволяют оценить лишь различия в диапазонах вариативности признака (критерий ϕ^*).
- 3.Позволяют выявить тенденции изменения признака при переходе от условия к условию при любом распределении признака (критерии тенденций L и S).
- 4.Эта возможность отсутствует.
- 5.Экспериментальные данные могут не отвечать ни одному из этих условий:
 - а) значения признака могут быть представлены в любой шкале, начиная от шкалы наименований;

б) распределение признака может быть любым и совпадение его с каким-либо теоретическим законом распределения необязательно и не нуждается в проверке;

в) требование равенства дисперсий отсутствует.

6. Математические расчеты по большей части просты и занимают мало времени (за исключением критериев χ^2 и λ). 7. Если условия, перечисленные в п.5, не выполняются, непараметрические критерии оказываются более мощными, чем параметрические, так как они менее чувствительны к "засорениям".

Непараметрические критерии лишены всех этих ограничений и не требуют таких длительных и сложных расчетов. По сравнению с параметрическими критериями они ограничены лишь в одном - с их помощью невозможно оценить взаимодействие двух или более условий или факторов, влияющих на изменение признака. Эту задачу может решить только дисперсионный двухфакторный анализ.

Учитывая это, в настоящее руководство включены в основном непараметрические статистические критерии. В сумме они охватывают большую часть возможных задач сопоставления данных.

4. Уровни статистической значимости

Уровень значимости - это вероятность того, что мы сочли различия существенными, а они на самом деле случайны.

Когда мы указываем, что различия достоверны на 5%-ом уровне значимости, или при $p \leq 0,05$, то мы имеем виду, что вероятность того, что они все-таки недостоверны, составляет 0,05.

Когда мы указываем, что различия достоверны на 1%-ом уровне значимости, или при $p \leq 0,01$, то мы имеем в виду, что вероятность того, что они все-таки недостоверны, составляет 0,01.

Если перевести все это на более формализованный язык, то уровень значимости - это вероятность отклонения нулевой гипотезы, в то время как она верна.

Ошибка, состоящая в том, что мы отклонили нулевую гипотезу, в то время как она верна, называется ошибкой 1 рода. (См. Табл. 1)

Табл. 1. Нулевая и альтернативные гипотезы и возможные состояния проверки.

Результат проверки гипотезы H_0	Возможные состояния проверяемой гипотезы	
	Верна гипотеза H_0	Верна гипотеза H_1
Гипотеза H_0 отклоняется	Ошибка первого рода	Правильное решение
Гипотеза H_0 не отклоняется	Правильное решение	Ошибка второго рода

Вероятность такой ошибки обычно обозначается как α . В сущности, мы должны были бы указывать в скобках не $p \leq 0,05$ или $p \leq 0,01$, а $\alpha \leq 0,05$ или $\alpha \leq 0,01$.

Если вероятность ошибки - это α , то вероятность правильного решения: $1 - \alpha$. Чем меньше α , тем больше вероятность правильного решения.

Исторически сложилось так, что в психологии принято считать низшим уровнем статистической значимости 5%-ый уровень ($p \leq 0,05$): достаточным – 1%-ый уровень ($p \leq 0,01$) и высшим 0,1%-ый уровень ($p \leq 0,001$), поэтому в таблицах критических значений обычно приводятся значения критериев, соответствующих уровням статистической значимости $p \leq 0,05$ и $p \leq 0,01$, иногда - $p \leq 0,001$. Для некоторых критериев в таблицах указан точный уровень значимости их разных эмпирических значений. Например, для $\phi^* = 1,56$ $p = 0,06$.

До тех пор, однако, пока уровень статистической значимости не достигнет $p = 0,05$, мы еще не имеем права отклонить нулевую гипотезу. Мы будем придерживаться следующего правила отклонения гипотезы об отсутствии различий (H_0) и принятия гипотезы о статистической достоверности различий (H_1).

Правило отклонения H_0 и принятия H_1

Если эмпирическое значение критерия равняется критическому значению, соответствующему $p \leq 0,05$ или превышает его, то H_0 отклоняется, но мы еще не можем определенно принять H_1 .

Если эмпирическое значение критерия равняется критическому значению, соответствующему $p \leq 0,01$ или превышает его, то H_0 отклоняется и принимается H_1 .

Исключения: критерий знаков G, критерий Т-Вилкоксона и критерий U-Манна-Уитни. Для них устанавливаются обратные соотношения.



Рис. 2. Пример «оси значимости» для критерия Q-Розенбаума.

Критические значения критерия обозначены как $Q_{0,05}$ и $Q_{0,01}$, эмпирическое значение критерия как $Q_{эмп}$. Оно заключено в эллипс.

Вправо от критического значения $Q_{0,01}$ простирается "зона значимости" - сюда попадают эмпирические значения, превышающие $Q_{0,01}$ и, следовательно, безусловно, значимые.

Влево от критического значения $Q_{0,05}$ простирается "зона незначимости", - сюда попадают эмпирические значения Q , которые ниже $Q_{0,05}$ и, следовательно, безусловно незначимы.

Мы видим, что $Q_{0,05}=6$; $Q_{0,01}=9$; $Q_{эмп.}=8$;

Эмпирическое значение критерия попадает в область между $Q_{0,05}$ и $Q_{0,01}$. Это зона "неопределенности": мы уже можем отклонить гипотезу о недостоверности различий (H_0), но еще не можем принять гипотезы об их достоверности (H_1).

Практически, однако, исследователь может считать достоверными уже те различия, которые не попадают в зону незначимости, заявив, что они достоверны при $p \leq 0,05$, или указав точный уровень значимости полученного эмпирического значения критерия, например: $p=0,02$. С помощью стандартных таблиц, которые есть во всех учебниках по математическим методам это можно сделать по отношению к критериям H Крускала-Уоллиса, χ^2_r Фридмана, L Пейджа, ϕ^* Фишера.

Уровень статистической значимости или критические значения критериев определяются по-разному при проверке направленных и ненаправленных статистических гипотез.

При направленной статистической гипотезе используется односторонний критерий, при ненаправленной гипотезе - двусторонний критерий. Двусторонний критерий более строг, поскольку он проверяет различия в обе стороны, и поэтому то эмпирическое значение критерия, которое ранее соответствовало уровню значимости $p \leq 0,05$, теперь соответствует лишь уровню $p \leq 0,10$.

Нам не придется всякий раз самостоятельно решать, использует ли он односторонний или двусторонний критерий. Таблицы критических значений критериев подобраны таким образом, что направленным гипотезам соответствует односторонний, а ненаправленным - двусторонний критерий, и приведенные значения удовлетворяют тем требованиям, которые предъявляются к каждому из них. Исследователю необходимо лишь следить за тем, чтобы его гипотезы совпадали по смыслу и по форме с гипотезами, предлагаемыми в описании каждого из критериев.

Мощность критериев

Мощность критерия - это его способность выявлять различия, если они есть. Иными словами, это его способность отклонить нулевую гипотезу об отсутствии различий, если она неверна.

Ошибка, состоящая в том, что мы приняли нулевую гипотезу, в то время как она неверна, называется ошибкой Прода.

Вероятность такой ошибки обозначается как β . Мощност критерия - это его способность не допустить ошибку Прода, поэтому:

$$\text{Мощность} = 1 - \beta$$

Мощность критерия определяется эмпирическим путем. Одни и те же задачи могут быть решены с помощью разных критериев, при этом обнаруживается, что некоторые критерии позволяют выявить различия там, где другие оказываются неспособными это сделать, или выявляют более высокий уровень значимости различий. Возникает вопрос: а зачем же тогда использовать менее мощные критерии? Дело в том, что основанием для выбора критерия может быть не только мощность, но и другие его характеристики, а именно:

а) простота;

- б) более широкий диапазон использования (например, по отношению к данным, определенным по номинативной шкале, или по отношению к большим n);
- в) применимость по отношению к неравным по объему выборкам;
- г) большая информативность результатов.

Отметим, что при компьютерной обработке нам, как правило, представляют на выбор ряд критериев (например: критерий знаков, критерий Вилкоксона, критерий Мак-Немары – при этом, по умолчанию указан критерий Вилкоксона).

Классификация задач и методов их решения.

Множество задач психологического исследования предполагает те или иные сопоставления. Мы сопоставляем группы испытуемых по какому-либо признаку, чтобы выявить различия между ними по этому признаку. Мы сопоставляем то, что было "до" с тем, что стало "после" наших экспериментальных или любых иных воздействий, чтобы определить эффективность этих воздействий. Мы сопоставляем эмпирическое распределение значений признака с каким-либо теоретическим законом распределения или два эмпирических распределения между собой, с тем, чтобы доказать неслучайность выбора альтернатив или различия в форме распределений.

Мы, далее, можем сопоставлять два признака, измеренные на одной и той же выборке испытуемых, для того, чтобы установить степень согласованности их изменений, их сопряженность, корреляцию между ними.

Наконец, мы можем сопоставлять индивидуальные значения, полученные при разных комбинациях каких-либо существенных условий, с тем, чтобы выявить характер взаимодействия этих условий в их влиянии на индивидуальные значения признака.

Именно эти задачи позволяет решить тот набор методов, который предлагается настоящим руководством. Все эти методы могут быть использованы при так называемой "ручной" обработке данных.

Принятие решения о выборе метода математической обработки

Если данные уже получены, то вам предлагается следующий алгоритм определения задачи и метода.

Принятие решения о задаче и методе обработки на стадии, когда данные уже получены:

1. Определить, какая из задач стоит в вашем исследовании.
2. Определить, каковы условия решения вашей задачи, например, сколько выборок обследовано или на какое количество групп вы можете разделить обследованную выборку.

3. Если вы еще находитесь на стадии планирования исследования, то лучше заранее подобрать математическую модель, которую вы будете в дальнейшем использовать. Особенно необходимо планирование в тех случаях, когда в перспективе предполагается использование критериев тенденций или (в еще большей степени) дисперсионного анализа. В этом случае алгоритм принятия решения таков.

Принятие решения о задаче и методе обработки на стадии планирования исследования:

1. Определите, какая модель вам кажется наиболее подходящей для доказательства ваших научных предположений.

2. Внимательно ознакомьтесь с описанием метода, примерами и задачами для самостоятельного решения, которые к нему прилагаются.

3. Если вы убедились, что это то, что вам нужно, вернитесь к разделу "Ограничения критерия" и решите, сможете ли вы собрать данные, которые будут отвечать этим ограничениям (большие объемы выборок, наличие не скольких выборок, монотонно различающихся по какому-либо признаку, например, по возрасту и т.п.).

4. Проводите исследование, а затем обрабатывайте полученные данные по заранее выбранному алгоритму, если вам удалось выполнить ограничения.

В описании каждого критерия сохраняется следующая последовательность изложения:

- назначение критерия;
- описание критерия;
- гипотезы, которые он позволяет проверить;

- графическое представление критерия;
- ограничения критерия;
- пример или примеры.

Кроме того, для каждого критерия может быть создан алгоритм расчетов. Если критерий сразу удобнее рассчитывать по алгоритму, то он приводится в разделе "Пример"; если алгоритм легче можно воспринять уже после рассмотрения примера, то он приводится в конце параграфа, соответствующего данному критерию.

Выявление различий в уровне исследуемого признака

Очень часто перед исследователем в психологии стоит задача выявления различий между двумя, тремя и более выборками испытуемых. Это может быть, например, задача определения психологических особенностей хронически больных детей по сравнению со здоровыми, юных правонарушителей по сравнению с законопослушными сверстниками или различий между работниками государственных предприятий и частных фирм, между людьми разной национальности или разной культуры и, наконец, между людьми разного возраста в методе "поперечных срезов".

Иногда по выявленным в исследовании статистически достоверным различиям формируется "групповой профиль" или "усредненный портрет" человека той или иной профессии, статуса, соматического заболевания и др.

В последние годы все чаще встает задача выявления психологического портрета специалиста новых профессий: "успешного менеджера", "успешного политика", "успешного торгового представителя", "успешного коммерческого директора" и др. Такого рода исследования не всегда подразумевают участие двух или более выборок. Иногда обследуется одна, но достаточно представительная выборка численностью не менее 60 человек, а затем внутри, этой выборки выделяются группы более и менее успешных специалистов, и их данные по исследованным переменным сопоставляются между собой. В самом простом случае критерием для деления выборки на "успешных" и "неуспешных-" будет средняя величина по показателю успешности. Однако такое деление является довольно

грубым: лица, получившие близкие оценки по успешности, могут оказаться в противоположных группах, а лица, заметно различающиеся по оценкам успешности, - в одной и той же группе. Это может исказить результаты сопоставления групп или, по крайней мере, сделать различия между группами менее заметными.

Чтобы избежать этого, можно попробовать выделить группы "успешных" и "неуспешных" специалистов более строго, включая в первую из них только тех, чьи значения превышают среднюю величину не менее чем на $1/4$ стандартного отклонения, а во вторую группу - только тех, чьи значения не менее чем на $1/4$ стандартного отклонения ниже средней величины. При этом все, кто оказывается в зоне средних величин, $M \pm 1/4\sigma$, выпадают из дальнейших сопоставлений. Если распределение близко к нормальному, то выпадет примерно 19,8% испытуемых. Если распределение отличается от нормального, то таких испытуемых может быть и больше. Чтобы избежать потерь, можно сопоставлять не две, а три группы испытуемых: с высокой, средней и низкой профессиональной успешностью.

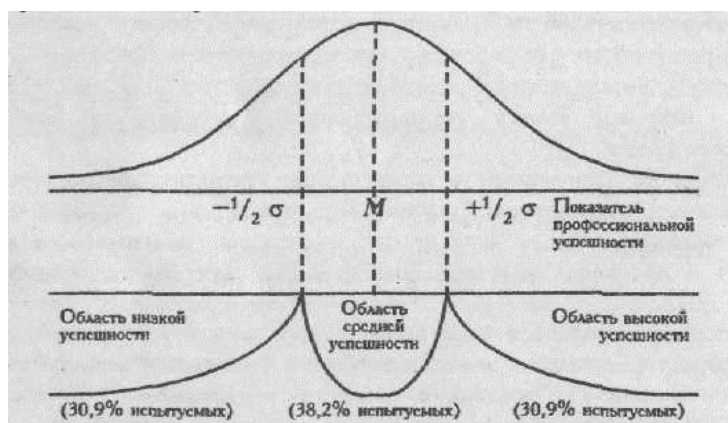


Рис.3. Схематическое изображение процесса разделения выборки на группы с низкой, средней и высокой профессиональной успешностью.

На рис.3 представлена схема разделения выборки на группы с низкой, средней и высокой профессиональной успешностью по критерию отклонения значений от средней величины на $1/2$ стандартного отклонения. При таком строгом критерии в "среднюю" группу попадают (при нормальном распределении) около 38,2% всех испытуемых, а в крайних группах оказывается по 30,9% испытуемых.

Чем меньше испытуемых оказывается в группах, тем меньше у нас возможностей для выявления достоверных различий, так как критические значения большинства критериев при малых *n* строже, чем при больших.

Таким образом, при нестрогом разделении испытуемых на группы мы теряем в точности, а при строгом - в количестве испытуемых.

При решении задач выявления различий в уровневых показателях следует помнить, что "усредненный профиль успешного специалиста" должен рассматриваться скорее как исследовательский результат, позволяющий сформулировать гипотезы для дальнейших исследований, а не как основание для профессионального отбора. Тому есть две причины.

Во-первых, ни у одного из успешных специалистов может не наблюдаться "усредненный профиль" - он, в сущности, является отвлеченным обобщением;

во-вторых, в профессиональной деятельности наличие собственного индивидуального стиля важнее соответствия "средне групповому" профилю. Недостаток в тех качествах, которые могут казаться важными, компенсируется другими качествами. У каждого успешного специалиста его психологические свойства создают неповторимый ансамбль, который при усреднении данных теряется.

Р.Б. Кеттелл, учитывая это, предлагал при исследовании профессиональной успешности включать в рассмотрение индивидуальные профили выдающихся представителей той или иной профессии.

Сопоставление уровневых показателей в разных выборках может быть необходимой частью комплексных диагностических, учебных, психо коррекционных и иных программ. Оно помогает нам обратить внимание на те особенности обследованных выборок, которые должны быть учтены и использованы при адаптации программ к данной группе в процессе их конкретного воплощения.

Критерии, которые рассматриваются в данной главе, предполагают, что мы сопоставляем так называемые независимые выборки, то есть две или более выборки, состоящие из разных испытуемых. Тот испытуемый, который входит в одну выборку, уже не может входить в другую. В противоположность этому, если мы обследуем одну и ту же выборку испытуемых, несколько раз подвергая её

аналогичным измерениям ("замерам"), то перед нами - так называемые связанные, или зависимые, выборки данных. Сопоставление 2-х или более замеров, полученных на одной и той же выборке, рассматривается в Теме 4.

Решение о выборе того или иного критерия принимается на основе того, сколько выборок сопоставляется и каков их объем.

Оценка достоверности сдвига в значениях исследуемого признака

Обоснование задачи исследований изменений.

В психологических исследованиях часто бывает важно доказать, что в результате действия каких-либо факторов произошли достоверные изменения ("сдвиги") в измеряемых показателях. К числу таких факторов должен быть отнесён, прежде всего, фактор времени. Сопоставление показателей, полученных у одних и тех же испытуемых по одним и тем же методикам, но в разное время, даёт нам *временной* сдвиг.

Многократные обследования одних и тех же лиц на протяжении достаточно длительного отрезка их жизненного пути, измеряемого иногда десятками лет, представляет собой так называемое лонгитюдинальное исследование, суть которого хорошо известна любому представителю Ленинградской-Петербургской школы психологии. Этот метод позволяет определить генетические связи между фазами психического развития и дать научно обоснованный прогноз дальнейшего психического развития.

Сопоставление показателей, полученных по одним и тем же методикам, но в разных условиях измерения (например, "покоя" и "стресса"), даёт нам *ситуационный* сдвиг. Условия измерения могут изменяться не только реально, но и умозрительно. Например, мы можем попросить испытуемого "представить себе", что он оказался в других условиях измерения: в будущем, в позиции других людей, которые оценивают его как бы со стороны, в состоянии разгневанного отца и т. п. Сопоставляя показатели, измеренные в обычных и воображаемых условиях, мы получаем *умозрительный* сдвиг.

Мы можем создать специальные экспериментальные условия, предположительно влияющие на те или иные показатели, и сопоставить замеры, произведен-

ные до и после экспериментального воздействия. Если сдвиги окажутся статистически достоверными, это позволит нам утверждать, что экспериментальные воздействия были существенными, или эффективными.

Например, мы можем сделать вывод о том, что данная программа тренинга действительно способствует развитию уверенности, или что данный способ внушающего воздействия влияет на изменение отношения испытуемых к той или иной проблеме, или что психодраматическая замена ролей подтверждает постулат Дж.Л. Морено о сближении позиции спорщиков после того, как им пришлось играть роль своего оппонента и т.п.

Во всех этих случаях мы говорим - **о сдвиге под влиянием** контролируемых или не контролируемых воздействий. И здесь мы наталкиваемся на методическую трудность, которую оказывается возможным преодолеть только путем введения контрольной группы, которая не испытывала бы на себе воздействия данного экспериментального фактора. Если нет контрольной группы, то сдвиг в экспериментальной группе может объясняться действием самых разных причин: временем суток, в которое производились замеры, важным для испытуемых событием, которое произошло между 1-м и 2-м замерами и по мощности воздействия значительно перекрыло экспериментальный фактор и т. п. Мы никогда не сможем исключить той возможности, что изменения, достигнутые, как нам кажется, в результате наших воздействий, на самом деле объясняются неучтенными причинами, вот если в *экспериментальной группе* сдвиги окажутся достоверными, а в *контрольной группе* - недостоверными, то это, действительно, может свидетельствовать об эффективности воздействий. При отсутствии контрольной группы мы констатируем, что сдвиг произошел, но не имеем права приписать его именно данным, изучаемым нами, факторам воздействия.

Допустим, мы установили, что после того, как двум конфликтующим подгруппам пришлось играть роль своих оппонентов в споре, усилилось ощущение понимания этих оппонентов "изнутри". Но мы не можем исключить возможности, что если бы мы не проводили психодраматической замены ролей, взаимопонимание все-таки бы улучшилось просто в силу того, что обе подгруппы какое-то вре-

мы учились и работали вместе. Бывают случаи, когда мы не располагаем контрольной группой, но зато в нашем распоряжении есть 2 или более экспериментальных, различающихся по условиям и способам воздействия на них. Это

могут быть, помимо экспериментальных, и разнообразные естественные условия жизни, обучения, работы, общения и даже питания, водоснабжения, географического расположения и т. д. Сопоставление групп, различающихся по этим признакам, позволит нам уточнить специфическое действие экспериментальных или естественно действующих факторов, хотя при этом нам следует помнить, что воздействие неучтенных факторов может оказаться еще более мощным.

В выводах мы все-таки будем ограничены, если не проверили свои результаты на контрольной группе, в которой измерения производились параллельно.

Помимо рассмотренных сдвигов: временных, ситуационных, умозрительных и сдвигов под влиянием, - можно рассмотреть еще особую категорию структурных сдвигов.

Мы можем сопоставлять между собой разные показатели одних и тех же испытуемых, если они измерены в одних и тех же единицах, по одной и той же шкале. Например, мы можем исследовать перепад между вербальным и невербальным интеллектом, измеренными по методике Д. Векслера, или сопоставлять экспертные оценки эмпатичности и наблюдательности, измеренные по одинаковой 10-балльной шкале, или время решения двух задач, измеренное в секундах, или экзаменационную успешность по разным дисциплинам и т.п.

В принципе, мы могли бы для такого рода "перепадов" использовать критерии оценки достоверности в средних тенденциях для независимых выборок: U-критерий, Q-критерий и угловое преобразование Фишера. Однако, строго говоря, перед нами - зависимые ряды значений, поскольку они измерены на одних и тех же испытуемых, поэтому будет более обоснованным использовать критерии оценки достоверности сдвигов для связанных выборок. Исключение представляют случаи, когда мы сопоставляем величины сдвигов в двух независимых группах испытуемых, например экспериментальной и контрольной (см. Табл.). Допустим, если мы установили, что положительный сдвиг в сторону улучшения взаимопо-

нимания наблюдается и в экспериментальной, и в контрольной группах, мы можем попробовать доказать, что в экспериментальной группе этот сдвиг достоверно больше, чем в контрольной, и что, следовательно, экспериментальное воздействие все-таки существенно.

Последний важный вопрос касается того, должны ли мы всегда производить оба замера на одной и той же выборке, или "сдвиг" можно изучать на сходных, так называемых "уравновешенных" выборках, совпадающих друг с другом по полу, возрасту, профессии и другим значимым для исследователя характеристикам.

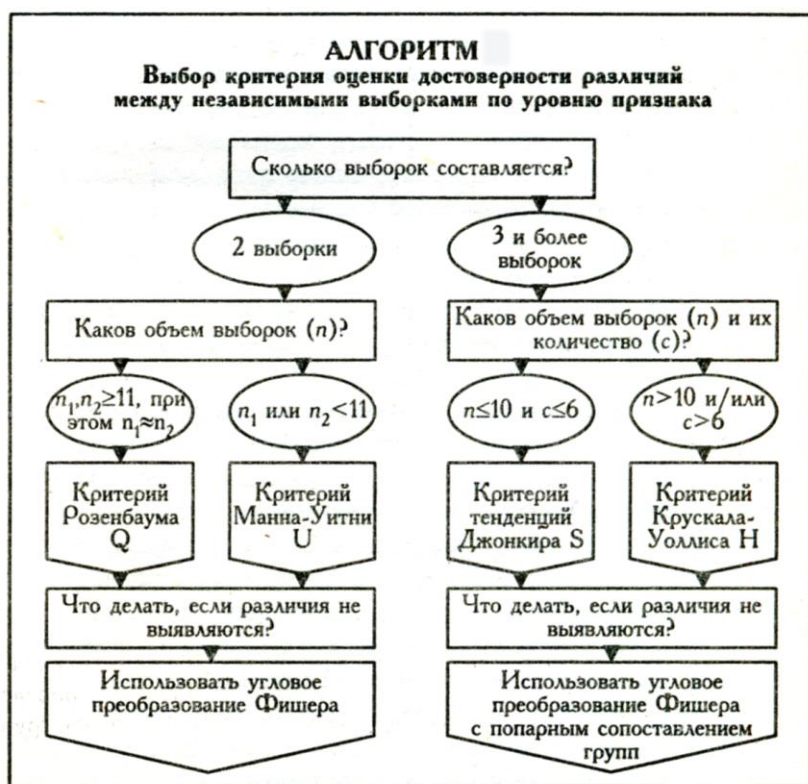
В сущности, допускается сопоставление показателей разных выборок, уравновешенных по всем значимым для исследования признакам. Иными словами, можно уровень тревоги или объем внимания до экзамена измерять у одной подгруппы, а после экзамена - у другой подгруппы, если они "уравновешены". Опыт показывает, однако, что создать "уравновешенные" подгруппы практически невозможно. Мы всегда упираемся в факт существования различий между выделенными подгруппами, которые могут в значительной степени повлиять на результат. В итоге окажется, что мы исследовали не влияние экзаменационного стресса на уровень тревоги или объем внимания, а различия по этому показателю между двумя выделенными подгруппами. К сожалению, в значительной степени это относится и к проблеме сопоставления экспериментальной и контрольной групп: мы почти никогда не можем быть уверены, что выявленные различия объясняются действием исследуемых факторов, а не различиями между двумя выборками.

Многие исследователи обходят эту проблему самым простым образом: они вообще не заботятся о контрольной группе. Сдвиг есть - значит, воздействие эффективно! И действительно, при отсутствии контрольной выборки тоже можно порассуждать на тему о том, какими же причинами, кроме предполагаемой, могут объясняться полученные сдвиги...

Другой вариант "уравновешивания" – ведение параллельных форм теста. В тех случаях, когда на результатах повторных замеров могут сказаться эффекты научения, приходится "до" измерять реакции испытуемого с помощью одного инструмента, а "после" - с помощью другого. В результате на измерениях может от-

разиться и действие фактора времени, и различия в параллельных формах теста, и непонятно что еще. Создать параллельную форму методики не менее трудно, чем подобрать "уравновешенную" группу испытуемых. И все же, в тех случаях, когда у нас нет другого выхода, приходится прибегать к этому способу.

При сопоставлении двух, замеров, произведенных на одной и той же (экспериментальной) выборке, применяются критерии знаков G и критерий T Вилкоксона. При сопоставлении трех и более замеров, произведенных на одной и той же выборке, применяются критерий тенденций L Пейджа, а если он неприменим из-за большого объема выборок – критерий χ^2 Фридмана.



В тех случаях, когда мы хотим оценить различия в интенсивности сдвига в двух группах испытуемых (контрольной и экспериментальной или двух экспериментальных), мы можем использовать различные варианты сопоставлений:

- 1) производить сопоставления отдельно в двух группах, используя критерии L и χ^2_r ;
- 2) сопоставлять показатели сдвига¹ в двух группах. Поскольку группы независимы, значения сдвигов также независимы, и мы можем применять по отноше-

нию к ним уже известные нам критерии Q-Розенбаума, U-Манна-Уитни и ϕ^* - угловое преобразование Фишера.

Сдвиг- это разность между вторым и первым замера¹. Сначала вычисляются разности отдельно для каждой из групп, а уж затем проводятся сопоставления Двух рядов разностей (сдвигов), полученных в разных группах.

Сравнение количественных показателей можно осуществлять непараметрическими методами, т.е. когда неизвестен закон распределения изучаемых величин.

ГЛАВА 5. КРИТЕРИИ Q-КРИТЕРИЙ РОЗЕНБАУМА И U-КРИТЕРИЙ МАННА-УИТНИ

В эконометрике часто рассматриваются различные экономические функции, которые характеризуют взаимозависимость между переменными. Оценка степени взаимосвязи между различными экономическими показателями и признаками проводится с помощью различных показателей и критериев.

На этапе проведения анализа данных гипотеза о взаимосвязи между исследуемыми переменными проверяется на случайных данных, поэтому о ее истинности можно судить только статистически. Для этого вводят статистический критерий, т. е. решающее правило, обеспечивающее принятие истинной и отклонение ложной гипотезы с высокой вероятностью. Данное правило предполагает сравнение некоторых чисел. Если по результатам проведенного эконометрического исследования мы выявим характер распределения изучавшегося признака, то в качестве таких чисел мы можем использовать параметры распределения и параметрические критерии, такие как t-критерий Стьюдента, F-критерий Фишера и другие.

Однако чаще всего установить характер распределения признака не удастся, а следовательно, и установить параметры распределения нельзя. В этом случае используют непараметрические критерии, к которым относят:

- критерии знаков;
- Q-критерий Розенбаума.
- U-критерий Манна-Уитни;
- T-критерий Вилкоксона;
- угловое преобразование Фишера.

Рассмотрим более подробно Q-критерий Розенбаума. Он используется для оценки различий между двумя выборками по уровню какого-либо признака, количественно измеренного. В каждой из выборок должно быть не менее 11 данных. Таким образом, можно, например, выявить предпочтения потребителей, дать оценку качества продукции, эффективно проводить различные маркетинговые исследования.

Этот простой непараметрический критерий позволяет быстро оценить различия между двумя выборками по какому-либо признаку. Если Q-критерий выявляет различия между выборками с уровнем значимости $\alpha = 0,01$, то можно ограничиться только им и избежать трудностей применения других критериев.

Критерий применяется в тех случаях, когда данные представлены в порядковой шкале и варьируют в каком-то диапазоне значений, иначе сопоставления с помощью Q-критерия просто невозможны. Например, если у нас только 3 значения признака 1, 2 и 3 — очень трудно будет установить различия.

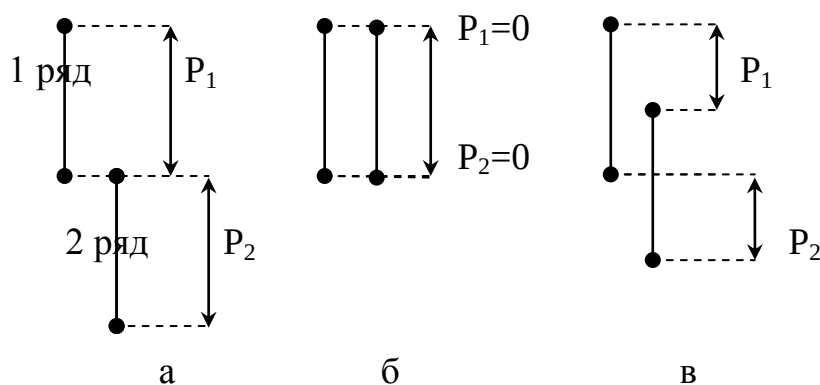
Применение критерия начинают с того, что упорядочивают значения признака в обеих выборках по нарастанию (убыванию). Тем самым устанавливают, совпадают ли диапазоны значений, и если нет, то насколько один ряд значений «выше» (P_1), а второй — «ниже» (P_2). Рекомендуется первым рядом (выборкой) считать тот ряд, где значения выше (предположительно), а вторым рядом — тот, где значения ниже.

В методе Розенбаума рассматривают следующие гипотезы:

H_0 : уровень признака в выборке 1 не превышает уровня признака в выборке 2;

H_2 : уровень признака в выборке 1 превышает уровень признака в выборке 2.

В соответствии с нашими рассуждениями возможно три варианта соотношения рядов значений в двух выборках (рис.1).



P_1 — зона значений 1-го ряда, которые выше максимального значения 2-го ряда;

P_2 — зона значений 2-го ряда, которые меньше минимального значения 1-го

ряда.

Рис.1 Возможные соотношения рядов значений в двух выборках.

В варианте (а) все значения первого ряда выше всех значений второго ряда. Различия, безусловно, достоверны при соблюдении условия, что $n_1, n_2 > 11$.

В варианте (б), напротив, оба ряда находятся на одном и том же уровне: различия недостоверны.

В варианте (в) ряды частично перекрещиваются, но все же первый ряд оказывается гораздо выше второго. Достаточно ли велики зоны P_1 и P_2 , в сумме составляющие Q , можно определить по таблице критических значений критерия Розенбаума. Чем величина Q больше, тем более достоверные различия мы сможем констатировать.

При применении Q -критерия необходимо учитывать следующие ограничения:

- в каждой из сопоставляемых выборок должно быть не менее 11 наблюдений.

При этом объемы выборок должны примерно совпадать;

- диапазоны разброса значений в двух выборках должны не совпадать между собой, в противном случае применение критерия бессмысленно. Между тем возможны случаи, когда диапазоны разброса значений совпадают, но, вследствие разносторонней асимметрии двух распределений различия в средних величинах признаков существенны.

Расчеты необходимо проводить, придерживаясь следующего общего алгоритма:

- Проверяем, выполняются ли ограничения: $n_1, n_2 > 11$, $n_1 \approx n_2$.
- Упорядочиваем значения отдельно в каждой выборке по степени возрастания признака. Считаем выборкой 1 ту выборку, значения в которой предположительно выше, а выборкой 2 - ту, где значения предположительно ниже.
- Определяем самое высокое (максимальное) значение в выборке 2.
- Подсчитываем количество значений в выборке 1, которые выше максимального значения в выборке 2. Обозначаем полученную величину как P_1 .
- Определяем самое низкое (минимальное) значение в выборке 1.

- Подсчитываем количество значений в выборке 2, которые ниже минимального значения выборки 1. Обозначаем полученную величину как P_2 .
- Подсчитываем эмпирическое значение критерия по формуле: $Q_{\phi} = P_1 + P_2$.
- По таблице критерия Розенбаума определяем критические значения Q для данных n_1 и n_2 . Если Q_{ϕ} при уровне значимости 0,05 превышает $Q_{кр}$, то гипотеза H_0 отвергается.

Пример 1.

Необходимо провести оценку предпочтений потребителей в рамках маркетингового исследования с помощью Q-критерий Розенбаума по группе товаров, представленных на сайте компании ООО «Агропродукт». Анализ предпочтений осуществить по итогам посещений страниц сайта компании за две недели марта отчетного года. В таблице приведены данные о количестве посещений страниц сайта по группе товаров «Овощи». За один период принимается 1 день.

№ периода	Перец болгарский	Огурцы кубанские	Огурцы пупырчатые	Помидоры козинские	Помидоры-черри	Капуста	Свекла	Огурцы длинные
1	14	17	3	14	26	17	16	12
2	21	9	6	16	28	23	13	7
3	17	13	11	20	21	25	21	14
4	19	16		18	30	14	18	9
5	10	19	9	17	19	19	14	13
6	23	15	7	11	27	21	17	18
7	19	24	17	15				

8	16	20	14	15	18	18	19	16
9	14	24	10	19	20			
10	18	18	6	20	21	23	13	9
11	20	26		18	19	21	17	13
12	15	17	10	21	27	19	15	14
13	19	9	9	24	23	18	14	17
14	25	13	12	20	17	24	11	8

Решение:

Для оценки различий выборки будем использовать Q-критерий Розенбаума с учетом соответствующего алгоритма.

Вначале проверим условие $n_i \geq 12$, в целом выборки по численности не сильно отличаются (от 12 до 14 значений).

1. Рассмотрим данные по товару 1 и 2, предварительно их упорядочив.

Перец		10	14	15	16	17	18	19	20	21	23	25	
Огурцы куб.	9		13	15	16	17	17	18	19	20	24		26

В силу того, что диапазоны вариативности перекрываются, делаем вывод о незначимости различий в предпочтениях посетителей сайта по отношению к перцу и огурцам кубанским, т.е. принимаем гипотезу H_0 .

Теперь сравним предпочтения по товарам 1 и 3.

Перец	$P_2=6$				10			14	15,16,17,18,18,19,19,20,21,23,25				
Огурцы пупыр.	3	6,6	7	9,9	10,10	11	12	14	$P_1=11$				

Таким образом, $P_1=11$, $P_2=6$ и $Q_{\phi} = 11+6=17$

Согласно критическим значениям Q-критерий Розенбаума при $n=12,14$ получим:

При $\alpha=0,05$ и $Q_{кр} = 7$

При $\alpha=0,01$ и $Q_{кр} = 9$

Так как фактическое значение больше критического, то принимается гипотеза H_1 , соответствующая большей предпочтительности в сопоставимой паре товара с

номером 1 – перец болгарский.

Сопоставим теперь предпочтения товаров 1 и 4.

Перец	10		14	...	21	23		25
Помидоры Коз.	$P_2=0$	11	14	...	20	21	24	$P_1=1$

Таким образом, $P_1=1$, $P_2=0$ и $Q_{\Phi}=1+0=1$

Согласно критическим значениям Q-критерий Розенбаума при $n=14,14$ получим:

При $\alpha=0,05$ и $Q_{кр}=6$

При $\alpha=0,01$ и $Q_{кр}=9$

Так как фактическое значение меньше критического, то принимается гипотеза H_0 о том, что между товарами 1 и 4 предпочтения не выделяется. Соответственно перец, огурцы кубанские, помидоры козинские находятся в одной по значимости группе предпочтений потребителей.

Аналогично рассмотрим 1 и 5 товары.

Помидоры- черри	$P_2=5$	17	...	23	24	26,27,27,28,30
Перец	10,14,14,15,16	17	...	23	25	$P_1=5$

Таким образом, $P_1=5$, $P_2=5$ и $Q_{\Phi}=5+5=10$

Согласно критическим значениям Q-критерий Розенбаума при $n=13,14$ получим:

При $\alpha=0,05$ и $Q_{кр}=6$

При $\alpha=0,01$ и $Q_{кр}=9$

Так как фактическое значение больше критического, то принимается гипотеза H_1 , соответствующая большей предпочтительности в сопоставимой паре товара с номером 1 – перец болгарский.

Аналогично рассмотрим 1 и 6 товары.

Капуста	$P_2=0$	14	...	23	24	$P_1=1$
Перец	10	14	...	23	23	25

Таким образом, $P_1=1$, $P_2=0$ и $Q_{\Phi}=1+0=1$

Согласно критическим значениям Q-критерий Розенбаума при $n=12,14$ получим:

При $\alpha=0,05$ и $Q_{кр}=7$

При $\alpha=0,01$ и $Q_{кр}=9$

Так как фактическое значение меньше критического, то принимается гипотеза H_0 о том, что между товарами 1 и 6 предпочтения не выделяется. Соответственно перец, огурцы кубанские, помидоры козинские находятся в одной по значимости группе предпочтений потребителей.

Предварительно можно сделать вывод, что товары 1,2,4 и 6 относятся к одной группе предпочтений потребителей.

Аналогично рассмотрим 1 и 7 товары.

Свекла	$P_2=0$	11	...	19	21	$P_1=2$
Перец	10	14	...	20	21	23,25

Таким образом, $P_1=2$, $P_2=0$ и $Q_{\phi}=2+0=2$

Согласно критическим значениям Q-критерий Розенбаума при $n=12,14$ получим:

При $\alpha=0,05$ и $Q_{кр}=7$

При $\alpha=0,01$ и $Q_{кр}=9$

Так как фактическое значение меньше критического, то принимается гипотеза H_0 о том, что между товарами 1 и 7 предпочтения не выделяется.

Аналогично рассмотрим 1 и 8 товары.

Перец	$P_2=4$	10	...	17	18	19,19,20,21,23,25
Огурцы Длин.	7,8,9,9	12	...	17	18	$P_1=6$

Таким образом, $P_1=6$, $P_2=4$ и $Q_{\phi}=6+4=10$

Согласно критическим значениям Q-критерий Розенбаума при $n=12,14$ получим:

При $\alpha=0,05$ и $Q_{кр}=7$

При $\alpha=0,01$ и $Q_{кр}=9$

Так как фактическое значение больше критического, то принимается гипотеза H_1 , соответствующая большей предпочтительности в сопоставимой паре товара с номером 1 – перец болгарский.

Теперь сравним товары 3 и 5.

Помидоры- черри	$P_2=11$	17		18,19,19,20,21,21,23,26,27,27,28,30
--------------------	----------	----	--	-------------------------------------

Огурцы пупыр.	3, 6,6,7,9,9,10,10,11,12,14	17		$P_1=12$
------------------	-----------------------------	----	--	----------

Таким образом, $P_1=11$, $P_2=12$ и $Q_{\phi} = 11+12=23$

Согласно критическим значениям Q-критерий Розенбаума при $n=12,13$ получим:

При $\alpha=0,05$ и $Q_{кр} = 6$

При $\alpha=0,01$ и $Q_{кр} = 9$

Так как фактическое значение больше критического, то принимается гипотеза H_1 , соответствующая большей предпочтительности в сопоставимой паре товара с номером 5 – помидоры-черри.

Теперь сравним товары 3 и 8.

Огурцы Длин.	$P_2=3$	7	...	17	18
Огурцы пупыр.	3, 6,6	7	...	17	$P_1=1$

Таким образом, $P_1=1$, $P_2=3$ и $Q_{\phi} = 1+3=4$

Согласно критическим значениям Q-критерий Розенбаума при $n=12,12$ получим:

При $\alpha=0,05$ и $Q_{кр} = 6$

При $\alpha=0,01$ и $Q_{кр} = 9$

Так как фактическое значение меньше критического, то принимается гипотеза H_0 о том, что между товарами 3 и 8 предпочтения не выделяется.

Таким образом, по результатам приведенных маркетинговых исследований было выявлено, что предпочтения покупателей распределяются следующим образом:

1. Помидоры-черри.
2. Перец болгарский, огурцы кубанские, помидоры козинские, капуста и свекла.
3. Огурцы пупырчатые, огурцы длинные.

U-критерий Манна-Уитни -непараметрический статистический критерий, используемый для сравнения двух независимых выборок по уровню какого-либо признака, измеренного количественно. Метод основан на определении того, достаточно ли мала зона перекрещивающихся значений между двумя вариационными рядами (ранжированным рядом значений параметра в первой выборке и таким же во второй выборке). Чем меньше значение критерия, тем вероятнее, что различия между значениями параметра в выборках достоверны.

Данный метод выявления различий между выборками был предложен в 1945 году американским химиком и статистиком Фрэнком Уилкоксоном. В 1947 году он был существенно переработан и расширен математиками Х.Б. Манном (H.B. Mann) и Д.Р. Уитни (D.R. Whitney), по именам которых сегодня обычно и называется.

U-критерий Манна-Уитни является непараметрическим критерием, поэтому, в отличие от t-критерия Стьюдента, не требует наличия нормального распределения сравниваемых совокупностей.

U-критерий подходит для сравнения малых выборок: в каждой из выборок должно быть не менее 3 значений признака. Допускается, чтобы в одной выборке было 2 значения, но во второй тогда должно быть не менее пяти. Он позволяет выявлять различия между малыми выборками, когда $n_1, n_2 \geq 3$ или $n_1=2, n_2 \geq 5$. И является более мощным, чем критерий Розенбаума. В каждой выборке должно быть не более 60 наблюдений; Однако уже при $n_1, n_2 > 20$ ранжирование становится достаточно трудоемким (что при компьютерной обработке не является критичным).

Этот метод определяет, достаточно ли мала зона перекрещивающихся значений между двумя рядами. Мы помним, что 1-м рядом (выборкой, группой) мы называем тот ряд значений, в котором значения, по предварительной оценке, выше, а 2-м рядом - тот, где они предположительно ниже.

Чем меньше область перекрещивающихся значений, тем более вероятно, что различия достоверны. Иногда эти различия называют различиями в расположении двух выборок. Эмпирическое значение критерия U отражает то,

насколько велика зона совпадения между рядами. Поэтому чем меньше U_{ϕ} , тем более вероятно, что различия достоверны.

При этом выдвигаются гипотезы:

H_0 : Уровень признака в группе 2 не ниже уровня признака в группе 1.

H_1 : Уровень признака в группе 2 ниже уровня признака в группе 1.

Условием для применения U-критерия Манна-Уитни является также отсутствие в сравниваемых группах совпадающих значений признака (все числа – разные) или очень малое число таких совпадений. Аналогом U-критерия Манна-Уитни для сравнения более двух групп является Критерий Краскела-Уоллиса.

Для расчета U-критерия Манна-Уитни используем следующий алгоритм.

Сначала из обеих сравниваемых выборок составляется единый ранжированный ряд, путем расставления единиц наблюдения по степени возрастания признака и присвоения меньшему значению меньшего ранга. В случае равных значений признака у нескольких единиц каждой из них присваивается среднее арифметическое последовательных значений рангов.

Например, две единицы, занимающие в едином ранжированном ряду 2 и 3 место (ранг), имеют одинаковые значения. Следовательно, каждой из них присваивается ранг равный $(3 + 2) / 2 = 2,5$.

В составленном едином ранжированном ряду общее количество рангов получится равным:

$$N = n_1 + n_2$$

где n_1 - количество элементов в первой выборке, а n_2 - количество элементов во второй выборке.

Далее вновь разделяем единый ранжированный ряд на два, состоящие соответственно из единиц первой и второй выборок, запоминая при этом значения рангов для каждой единицы. Подсчитываем отдельно сумму рангов, пришедшихся на долю элементов первой выборки, и отдельно - на долю элементов второй выборки. Определяем большую из двух ранговых сумм (T_x) соответствующую выборке с n_x элементами.

Наконец, находим значение U-критерия Манна-Уитни по формуле:

$$U = n_1 \cdot n_2 + \frac{n_x \cdot (n_x + 1)}{2} - T_x$$

Полученное значение U-критерия сравниваем по таблице для избранного уровня статистической значимости ($p=0.05$ или $p=0.01$) с критическим значением U при заданной численности сопоставляемых выборок:

- Если полученное значение U меньше табличного или равно ему, то признается статистическая значимость различий между уровнями признака в рассматриваемых выборках (принимается альтернативная гипотеза). Достоверность различий тем выше, чем меньше значение U.
- Если же полученное значение U больше табличного, принимается нулевая гипотеза.

Пример 2.

Двенадцать рабочих предприятия прошли повышение квалификации из 22 имеющихся. В результате был определен прирост производительности труда рабочих в следующем месяце. Необходимо определить действительно ли наблюдается рост выработки продукции у рабочих, повысивших свою квалификацию с помощью U-критерия Манна-Уитни.

Таблица – Прирост производительности труда рабочих 2 групп (обычная и с более высокой квалификацией), %

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	112	105	109	90	130	117	117	125	134	109		
2	121	120	134	119	115	106	107	101	97	117	140	138

Расположим все значения в один ряд и проранжируем их.

№ ряда	Прирост производи- тельности	Ранг
2	140	1
2	138	2
2	134	$(3+4)/2=3,5$
1		
1	130	5
1	125	6
2	121	7

2	120	8
2	119	9
1	117	(10+11+12)/3=11
1		
2		
2	115	13
1	112	14
1	109	(15+16)/2=15,5
1		
2	107	17
2	106	18
1	105	19
2	101	20
2	97	21
1	90	22

Теперь просуммируем ранги значений в группе 1 и 2.

Ранг №1=3,5+5+6+11+11+14+15,5+15,5+19+22=122,5

Ранг №2=1+2+3,5+7+8+9+11+13+17+18++20+21=130,5

Из имеющихся ранговых сумм большая сумма в группе №2. Далее определим фактическое значение U-критерия Манна-Уитни по формуле:

$$U = n_1 \cdot n_2 + \frac{n_x \cdot (n_x + 1)}{2} - T_x$$

$$U=10 \cdot 12 + 12 \cdot 13 / 2 - 130,5 = 67,5$$

Теперь определим критическое значение U-критерия по таблице при уровне значимости $\alpha=0,05$, $n_1=10$, $n_2=12$

$$U_{кр} = 29$$

Полученное значение $U_{ф}=67,5 > U_{кр} = 29$ значит принимается нулевая гипотеза с вероятностью 95%. Т.е. группа рабочих с высокой квалификацией не превосходит группы обычных рабочих по уровню производительности труда. Таким образом, рост квалификации не повлиял на изменение производительности труда рабочих.

ГЛАВА 6. Т-КРИТЕРИЙ ВИЛКОКСОНА И ОЦЕНКА СВЯЗИ МЕЖДУ КАЧЕСТВЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Критерий Уилкоксона для связанных выборок (также используются названия Т-критерий Уилкоксона, критерий Вилкоксона, критерий знаковых рангов Уилкоксона, критерий суммы рангов Уилкоксона) – непараметрический статистический критерий, используемый для сравнения двух связанных (парных) выборок по уровню какого-либо количественного признака, измеренного в непрерывной или в порядковой шкале.

Тест был впервые предложен в 1945 году американским статистиком и химиком Фрэнком Уилкоксоном (1892-1965). В той же научной работе автором был описан еще один критерий, применяемый в случае сравнения независимых выборок.

Критерий применяется для сопоставления показателей, измеренных в двух разных условиях на одной и той же выборке испытуемых. Он позволяет установить не только направленность изменений, но и их выраженность. С его помощью определяем, является ли сдвиг показателей в каком-то одном направлении более интенсивным, чем в другом.

Суть метода состоит в том, что сопоставляются абсолютные величины выраженности сдвигов в том или ином направлении. Для этого сначала все абсолютные величины сдвигов ранжируются, а потом суммируются ранги. Если сдвиги в ту или иную сторону происходят случайно, то и суммы их рангов окажутся примерно равны. Если же интенсивность сдвигов в одну сторону больше, то сумма рангов абсолютных значений сдвигов в противоположную сторону будет значительно ниже, чем это могло бы быть при случайных изменениях.

Гипотезы:

H_0 : Интенсивность сдвигов в типичном направлении исследуемого признака не превосходит интенсивности сдвигов в нетипичном направлении.

H_1 : Интенсивность сдвигов в типичном направлении исследуемого признака превышает интенсивность сдвигов в нетипичном направлении.

Классическим примером ситуации, в которой может применяться Т-критерий Уилкоксона для связанных совокупностей, является исследование "до-после", когда сравниваются показатели до и после какого-либо процесса. Например, при изучении эффективности производства сравниваются финансовые результаты предприятий до и после модернизации оборудования или смены руководства управления.

Условия применения Т –критерия Вилкоксона:

- Критерий Уилкоксона является непараметрическим критерием, поэтому, в отличие от парного t-критерия Стьюдента, не требует наличия нормального распределения сравниваемых совокупностей.

- Измерение может быть проведено во всех шкалах, кроме шкалы номинальной. То есть изучаемый признак может быть измерен как в количественной непрерывной (прибыль, производительность труда), так и в порядковой шкале (число баллов, степень механизации производства, численность работников).

- Данный критерий используется только в случае сравнения двух рядов измерений. Аналогом Т-критерия Уилкоксона для сравнения трех и более связанных совокупностей является критерий Фридмана.

- Выборка должна быть связной. Число элементов в сравниваемых выборках должно быть равным.

- Минимальное количество испытуемых, прошедших измерения в двух условиях, – 5 человек. Максимальное количество испытуемых – 50 человек.

- Нулевые сдвиги из рассмотрения исключаются, и количество наблюдений n уменьшается на количество этих нулевых сдвигов. Можно обойти это ограничение, сформулировав гипотезы, включающие отсутствие изменений, например: «Сдвиг в сторону увеличения значений превышает сдвиг в сторону уменьшения значений и тенденцию сохранения их на прежнем уровне».

Алгоритм подсчета Т –критерия Вилкоксона

1. Проверить ограничения.

2. Вычислить разность между индивидуальными значениями во втором и первом замерах («после» – «до»). Нулевые сдвиги далее не учитываются.
3. Определить, какие из разностей являются типичными, то есть соответствуют преобладающему по частоте направлению изменения показателя.
4. Проранжировать разности пар по их абсолютным значениям (то есть, без учета знака), в порядке возрастания. Меньшему абсолютному значению разности приписывается меньший ранг.
5. Рассчитать сумму рангов, соответствующих нетипичным сдвигам. Таким образом, Т-критерий Уилкоксона для связанных выборок рассчитывается по следующей формуле:

$$T = \Sigma R_r$$

где ΣR_r - сумма рангов, соответствующих нетипичным изменениям показателя

6. Определить критические значения T для данного n по таблице критических значений:
 - Если расчетное (фактическое) значение $T_{\text{ф.}}$ *меньше* табличного $T_{\text{кр.}}$ или *равно* ему, то признается статистическая значимость изменений показателя в типичную сторону (принимается альтернативная гипотеза). Достоверность различий тем выше, чем меньше значение T .
 - Если $T_{\text{ф.}}$ *больше* $T_{\text{кр.}}$, принимается нулевая гипотеза об отсутствии статистической значимости изменений показателя.
7. Для процесса принятия решения вычертить «ось значимости». При построении «оси значимости» необходимо внимательно отнестись к тому, что «зона значимости» в данном случае простирается влево, а «зона незначимости» справа. Таким образом, если $T_{\text{ф.}}$ меньше или равен $T_{\text{кр.}}$, сдвиг в «типичную» сторону по интенсивности достоверно преобладает.

Пример. В компании в целях совершенствования организации труда был изменен режим работы рабочих. У них был определен процент брака продукции, который они допускали до и после изменения условий труда. Требуется сделать вывод о значимости изменений в уровне качества производимой продукции в резуль-

тате совершенствования организации труда рабочих.

№	Фамилия	Процент брака до изменений	Процент брака после изменений
1.	Иванов	3,90	3,76
2.	Петров	3,95	3,87
3.	Сидоров	3,86	3,87
4.	Попов	3,91	3,85
5.	Николаев	4,01	3,86
6.	Козлов	3,93	3,75
7.	Игнатьев	3,89	3,88
8.	Семенов	3,92	3,80
9.	Егоров	3,98	3,97
10.	Алексеев	3,88	3,93

Решение:

Все условия для применения критерия Уилкоксона выполнены. Поэтому проведем проверку значимости изменений с помощью Т-критерия Уилкоксона. Вначале рассчитаем разности парных показателей и проранжируем их абсолютные значения. При этом нетипичные ранги выделим жирным шрифтом:

№	Фамилия	Процент брака до изменений	Процент брака после изменений	Разность показателей, d	d	Ранг
1.	Иванов	39.0	37.6	-1.4	1.4	7
2.	Петров	39.5	38.7	-0.8	0.8	5
3.	Сидоров	38.6	38.7	0.1	0.1	(1+2)/2=1.5
4.	Попов	39.1	38.5	-0.6	0.6	4
5.	Николаев	40.1	38.6	-1.5	1.5	8
6.	Козлов	39.3	37.5	-1.8	1.8	9
7.	Игнатьев	38.9	38.8	-0.1	0.1	(1+2)/2=1.5

N	Фамилия	Процент брака до изменений	Процент брака после изменений	Разность показателей, d	d	Ранг
8.	Семенов	39.2	38.0	-1.2	1.2	6
9.	Егоров	39.8	39.8	0	—	—
10.	Алексеев	38.8	39.3	0.5	0.5	3

Как мы видим, *типичным сдвигом* показателя является его снижение, отмеченное в 7 случаях из 10. В одном случае (у рабочего Егорова) – процент брака после совершенствования условий труда не изменился, в связи с чем данный случай не использовался в дальнейшем анализе. В двух случаях (у рабочих Сидорова и Алексеева) отмечался *нетипичный сдвиг* брака в сторону повышения. Ранги, соответствующие нетипичному сдвигу, равны 1.5 и 3.

С учетом проведенного анализа рассчитаем Т-критерий Уилкоксона, который равен сумме рангов, соответствующих нетипичному сдвигу показателя:

$$T = \sum R_r = 3 + 1.5 = 4.5$$

Находим $T_{кр.}$, который при уровне значимости $\alpha=0.05$ и $n=9$ равен 8. Следовательно, $T_{ф.} < T_{кр.}$, изменения показателя статистически значимы с вероятностью 95%, т.е. при $\alpha < 0.05$.

Таким образом, снижение процента брака выпуска продукции у рабочих в результате совершенствования организации труда является статистически значимым ($\alpha < 0.05$).

Оценка связи между качественными признаками.

Для определения тесноты связи двух качественных признаков, каждый из которых состоит только из двух вариантов, применяются коэффициенты ассоциации и контингенции. Анализируемый материал располагается в виде таблицы сопряженности, которая показывает связь между двумя явлениями, каждое из которых должно быть альтернативным. Основное условие для расчета специ-

альных коэффициентов – частота совместного появления наблюдаемых атрибутивных признаков, и чем она выше, тем сильнее связь между ними.

Таблица для вычислений коэффициентов ассоциации и контингенции

Значение 2-го признака	Значение 1-го признака		
	1-е	2-е	Итого
1-е	a	b	a+b
2-е	c	d	c+d
Итого	a+c	b+d	a+b+c+d

Коэффициент ассоциации рассчитывается по формуле:

$$1. K_a = (ad - bc) / (ad + bc)$$

Коэффициент ассоциации также изменяется от -1 до +1. Чем K_a ближе к единице, тем сильнее связаны между собой изучаемые признаки. При $ad > bc$ связь прямая, а при $ad < bc$ связь обратная при $ad = bc$ $K_a = 0$ и связь отсутствует.

Коэффициент контингенции:

$$K_c = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{\sqrt{(a+b) \cdot (c+d) \cdot (a+c) \cdot (b+d)}}$$

Связь считается подтвержденной, если $K_c \geq 0,3$

Коэффициент контингенции, как считается, всегда меньше коэффициента ассоциации и дает более осторожную оценку тесноты связи между признаками. Для объема совокупности от 30 единиц и выше связь можно считаться значимой, если величина этих коэффициентов не меньше 0,5 и 0,3 соответственно.

Для определения тесноты связи между количественными признаками и качественными с числом вариантов большим двух можно использовать **ранговую корреляцию**. Эти показатели также относятся к непараметрическим методом оценивания степени тесноты связи.

Пусть n наблюдений совокупности пронумерованы порядке возрастания или убывания какого-либо признака x , т.е. они ранжированы (отсортированы) по этому признаку. Ранг R_i указывает то место, которое занимает i -й объект среди других n наблюдений по признаку x ($i = 1, 2, 3, \dots, n$). Для того рода ранжированных объектов показателями связи служат коэффициенты корреляции рангов. Наибольшее

применение из них имеют **коэффициенты К. Спирмэна** и **М. Кендэла**. Коэффициент корреляции рангов **К. Спирмэна** (r) основан на рассмотрении разности рангов значений признаков и рассчитывается следующим образом:

$$S = 1 - \frac{6 \cdot \sum d^2}{n \cdot (n^2 - 1)}$$

где n - число сопоставимых пар (наблюдений); d - разность между рангами (порядковыми номерами) в двух рядах.

Этот коэффициент интерпретируется так же, как и коэффициент линейной корреляции, имеет те же свойства и пределы изменения (от -1 до +1). Но отличие от коэффициента линейной корреляции он может применяться при любой форме распределения и для любых признаков.

Коэффициент корреляции рангов **М. Кендэла** (τ) вычисляется:

$$K = 2S / [n(n-1)]$$

где S - алгебраическая сумма числа высших рангов по отношению к каждому низшему рангу, взятому последовательно как значение y и сопоставленному с рядом значений x в восходящем и нисходящем порядках: $S = P + Q$.

При определении слагаемого P нужно установить, сколько чисел, находящихся справа от каждого из элементов последовательности рангов переменной y , имеют величину ранга, превышающую ранг рассматриваемого элемента. Сумма этих чисел и определит P . Чтобы определить Q подсчитываем, сколько чисел, находящихся справа от каждого из членов последовательности рангов переменной y , имеют ранг меньше, чем этот фактор. Такие величины берутся со знаком "минус".

Коэффициент **М. Кендэла** изменяется в тех же пределах (от -1 до +1) и равен 0 при отсутствии связи между рядами рангов. Между коэффициентами ранговой корреляции **К. Спирмэна** и **М. Кендэла** при достаточно большом числе наблюдений справедливо следующее соотношение:

$$S = 3/2 \cdot K$$

В некоторых случаях для определения степени тесноты связи могут вычисляться показатели взаимной сопряженности (**коэффициент Пирсона** и **Чупрова**).

Пример 1. Произведем расчет обоих коэффициентов корреляции рангов исходя из известных данных (х- себестоимость единицы продукции, руб., у – рентабельность продукции, %)

X	Y	R _x	R _y	R _x -R _y	(R _x -R _y) ²
201	0.2	1	7	-6	36
178	0.6	2	6	-4	16
155	1.1	3	4	-1	1
154	0.8	4	5	-1	1
126	2.5	5	3	+2	4
81	4.4	6	2	+4	16
71	16.9	7	1	+6	36
n = 7	-	-	-	-	110

Определим коэффициент К.Спирмэна:

$$S=1-6*110/[7(49-1)]=1-660/336=-0,964$$

Для вычисления коэффициента М.Кендэла определим величины Р и Q. Р- величина, вычисляемая для каждого ранга второго ряда (если первый ряд ранжирован строго в порядке возрастания вариантов) как сумма последующих рангов, больших по своей величине, чем взятый ранг. Так, число рангов, превышающих ранг 7, равно 0, ранг 6 — равно 0 и т.д.

$$P = 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 = 1.$$

Для вычисления Q необходимо для каждого ранга второго ряда определить число последующих рангов, меньших по своей величине, чем взятый ранг, и просуммировать их:

$$Q = (-6) + (-5) + (-3) + (-3) + (-2) + (-1) = -20.$$

$$\text{Следовательно, } K = 2(+1-20)/[7(7-1)]=-38/42= -0,905.$$

Оба коэффициента показывают высокую степень отрицательной (обратной) связи между взятыми признаками, и вполне логично, что первый коэффициент оказался несколько выше. Таким образом, между рентабельностью продукции и себестоимостью единицы продукции существует сильная обратная связь.

Пример 2. Необходимо оценить степень тесноты связи между уровнем образования и производительностью труда.

	Производительность высокая	Производительность низкая
Имеют высшее образование	320	190
Не имеют высшее образование	130	280

Решение: оценим степень тесноты связи с помощью коэффициентов ассоциации и контингенции:

коэффициент ассоциации

$$K_a = (ad - bc) / (ad + bc) = (89600 - 24700) / (89600 + 24700) = 0,57$$

Коэффициент контингенции:

$$K_c = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{\sqrt{(a + b) \cdot (c + d) \cdot (a + c) \cdot (b + d)}} = \frac{64900}{\sqrt{510 \cdot 410 \cdot 450 \cdot 470}} = 0,31$$

Учитывая, что коэффициенты превышают пороговые значения, то связь считается подтверждённой. Таким образом, уровень образования напрямую влияет на уровень производительности труда работников.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Критические значения **Q-критерий Розенбаума** для уровней статистической значимости $\alpha \leq 0,05$ и $\alpha \leq 0,01$

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
$p \geq 0.05$																
11	6															
12	6	6														
13	6	6	6													
14	7	7	6	6												
15	7	7	6	6	6											
16	7	7	7	7	6	6										
17	7	7	7	7	7	7	7									
18	7	7	7	7	7	7	7	7								
19	7	7	7	7	7	7	7	7	7							
20	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7						
21	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7					
22	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7				
23	8	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7			
24	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7		
25	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7	
26	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7
$p = 0.01$																
11	9															
12	9	9														
13	9	9	9													
14	9	9	9	9												
15	9	9	9	9	9											
16	9	9	9	9	9	9										
17	10	9	9	9	9	9	9									
18	10	10	9	9	9	9	9	9								
19	10	10	10	9	9	9	9	9	9							
20	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9						
21	11	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9					
22	11	11	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9				
23	11	11	11	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9			
24	12	11	11	11	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9		
25	12	11	11	11	10	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9	
26	12	12	11	11	11	10	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9

Критические значения **U-критерий** для уровней статистической значимости $\alpha \leq 0,05$

N₁	N₂													
	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
3	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8
4	3	4	4	5	6	7	8	9	10	11	11	12	13	13
5	5	6	7	8	9	11	12	13	14	15	17	18	19	20
6	6	8	10	11	13	14	16	17	19	21	22	24	25	27

7	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
8	10	13	15	17	19	22	24	26	29	31	34	36	38	41
9	12	15	17	20	23	26	28	30	34	37	39	42	45	48
10	14	17	20	23	26	29	33	36	39	42	45	48	52	55
11	16	19	23	26	30	33	37	40	44	48	51	55	58	62
12	18	22	26	29	33	37	41	45	49	53	57	61	65	69
13	20	24	28	33	37	41	45	50	54	59	63	67	72	76
14	22	26	30	36	40	45	50	55	59	64	67	74	78	83
15	24	29	34	39	44	49	54	59	64	70	75	80	85	90
16	26	31	37	42	48	53	59	64	70	75	81	86	92	98
17	28	34	39	45	51	57	63	67	75	81	87	93	99	105
18	30	36	42	48	55	61	67	74	80	86	93	99	106	112
19	32	38	45	52	58	65	72	78	85	92	99	106	113	119
20	34	41	48	55	62	69	76	83	90	98	105	112	119	127

Критические значения Т-критерия Уилкоксона для уровней статистической значимости $\alpha \leq 0,05$ и $\alpha \leq 0,01$

Число исследуемых, n	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$
5	0	—
6	2	—
7	3	0
8	5	1
9	8	3
10	10	5
11	13	7
12	17	9
13	21	12
14	25	15
15	30	19
16	35	23
17	41	27
18	47	32
19	53	37
20	60	43
21	67	49
22	75	55
23	83	62
24	91	69
25	100	76
26	110	84
27	119	92
28	130	101
29	140	110
30	151	120
31	163	130
32	175	140
33	187	151
34	200	162
35	213	173
36	227	185

37	241	198
38	256	211
39	271	224
40	286	238
41	302	252
42	319	266
43	336	281
44	353	296
45	371	312
46	389	328
47	407	345
48	426	362
49	446	379
50	466	397