МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

«Смоленская государственная сельскохозяйственная академия»

(ФГБОУ ВО «Смоленская ГСХА»)

А.В. БЕЛОКОПЫТОВ

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
И ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ**

Смоленск 2023

УДК 631.15(075)
ББК 65.32-2я73
Б-43

Рецензент: Яроцкая Е.В., к.э.н, доцент, и.о. заведующего кафедрой экономики и бухгалтерского учета ФГБОУ ВО Смоленская ГСХА

Белокопытов А.В.

Б 43 Экономико-математические методы и модели: методические рекомендации и задания для практических занятий / А.В. Белокопытов – Смоленск: изд. ФГБОУ ВО «Смоленская ГСХА», 2023.- 178 с.

Методические рекомендации подготовлено в соответствии с федеральными государственными образовательными стандартами высшего образования по направлению подготовки 38.03.05 Бизнес-информатика. В методическом рекомендациях представлены теоретические блоки, контрольные вопросы и различные задания для проведения практических занятий в рамках изучения дисциплин «Математические методы в экономике», «Моделирование бизнес-процессов». В пособии рассматриваются задачи линейного, нелинейного, стохастического и динамического программирования; сетевые задачи; задачи теории игр.

Предназначено для студентов экономических направлений, научных сотрудников и аспирантов.

Печатается по решению научно-методического совета ФГБОУ ВО Смоленская ГСХА (протокол №2 от 11 декабря 2023 года)

УДК 631.15(075)
ББК 65.32-2я73

СОДЕРЖАНИЕ

РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1. ИСТОРИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Экономико-математические методы и модели (ЭМММ) применяют с целью отыскания наилучшего решения, т.е. решения, оптимального в том или ином смысле (максимума или минимума).

Поиск наилучшего решения занимал умы людей на протяжении многих веков. Еще Евклид описал способы построения наибольшего и наименьшего из отрезков, соединяющих данную точку с окружностью, и показал, как среди параллелограммов с заданным параметром найти параллелограмм максимальной площади.

Великие математики XVII и XVIII вв. развили новые методы оптимизации для решения комплекса задач геометрии, механики, физики. К таким задачам, например, относится отыскание минимальных поверхностей вращения или кривой наибыстрейшего спуска.

Начало применения математических методов в экономике относят к первому десятилетию нашего столетия, когда в 1911 г. русский экономист И.Дмитриев описывает балансовые соотношения “продукты-ресурсы” с помощью линейных алгебраических выражений, которые в 30-х годах американский профессор Массачусетского технологического института В.Леонтьев использует для построения балансов народного хозяйства США.

Собственно оптимизационные методы решения экономических задач возникают с 1939 г., когда выдающийся советский математик и экономист Л.В.Канторович (тогда профессор ЛГУ) публикует первую работу в этой области “Математические методы организации и планирования производства”, в которой впервые формулирует задачу линейного программирования, описывает реальную экономическую ситуацию, разрабатывает алгоритм решения.

В последующие годы, когда применение математических методов в экономике у нас в стране считалось крупной методологической ошибкой, их роль и значение недооценивалось, они начинают с конца 40-х годов интенсивно развиваться в США в рамках исследования операций, и прежде всего в военной области, например, оптимальное развертывание боевой авиации, максимизирующее шансы страны на победу в войне и др.

Исторически общая задача линейного программирования ставится в 1947г. Дж.Данцигом и М.Вудом в департаменте ВВС США. Данцигом предлагается универсальный алгоритм решения задач линейного программирования, названный им симплекс-методом. В 1941 г. Хичкок и независимо от него Купсман в 1947 г. формулируют транспортную задачу, Стиглер в 1945 г. - задачу о диете. В 1952 г. было проведено первое успешное решение задачи линейного программирования на ПК “Seac” в Национальном бюро стандартов США. С этого же периода интенсификация исследований в трудах Гасса, Баранова и Дорфмана (квадратичное программирование), Беллмана и Дрейфуса (нелинейное программирование).

В 50-60-х гг. появляются значительные работы в области экономико-математического моделирования и у нас, в том числе: Канторович Л.В. Экономический расчет наилучшего исследования ресурсов. АН СССР, 1959; Канторович Л.В., Гавурин М.К. Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков. АН СССР, 1949; работы В.В.Новожилова по оптимальному планированию народного хозяйства. В 1960 г. академик В.С.Немчинов при Новосибирском отделении АН СССР создает лабораторию экономико-математического моделирования, в Киеве организуется институт кибернетики, возглавляемый академиком В.М.Глушковым.

В наше время исследование операций применяют к определенному классу задач, связанному со сложными организационными структурами современного общества. Наша естественная склонность ставить и решать подобные задачи проявляется в выражениях типа “с наименьшими затратами”, “максимальная прибыль”, “полная отдача” и т.п. Сюда относятся задачи наиболее эффективного управления предприятием, распределения ресурсов, управления технологическими процессами, создания оптимальных конструкций, управления грузопотоками, персоналом и многие другие.

Эти задачи возникают не только в промышленности, но и в повседневной жизни каждого человека. Например, задача программирования утреннего одевания. Мы должны выбрать программу действий, которая позволит одеться так, чтобы выполнялись определенные ограничения или общепринятые правила (носки необходимо одевать, но не поверх ботинок и т.д.). Время - основной ресурс, и выбранная программа должна быть наилучшей в том смысле, в каком каждый понимает расход утреннего времени. Если программа включает шесть предметов одежды: ботинки, носки, брюки, рубашку, галстук, пиджак, то программа - любой порядок, в котором можно надеть эти предметы. Всего в этом случае существует $6! = 720$ различных программ. Многие из них недопустимы (носки поверх ботинок, галстук под рубашку) и если их отбросить, все равно остается несколько допустимых программ, которые нужно исследовать. Как же выбрать окончательное, оптимальное решение?

В этой или любой другой задаче, где необходимо анализировать все возможные варианты решений, и выбрать единственный, оптимальный, имеется некая основная цель, позволяющая сравнивать эффективность этих допустимых вариантов (программ действий). Если мы сможем как-нибудь сравнить меры этих программ, то тем самым можем выбрать и оптимальную. Если эта мера - затраты времени, то оптимальная программа утреннего одевания: носки, рубашка, брюки, галстук, ботинки, пиджак - минимизирует время на одевание без нарушения общепринятых ограничений. Но может быть и другая мера - минимизация утреннего шума - как можно меньше открывать-закрывать дверцы и шкафчики. Тогда будет и другое оптимальное решение.

Вывод. Задачи математического программирования существуют только тогда, когда имеется много допустимых решений (по крайней мере, от двух и более). Если допустимое решение единственное, не возникает никакой проблемы по поиску решения.

Постановки задачи поиска оптимального решения известны еще из древности. Например, при изготовлении самого простого кувшина объективно требуют решения такие вопросы:

- Какой формы должен быть кувшин, чтобы при использовании имеющегося количества глины его объем был максимальным ?
- Глина имеет некоторую стоимость, тогда - другая постановка вопроса:
- Какую выбрать форму, чтобы при заданной стоимости глины объем кувшина был максимальным ? Или:
- Какой формы должен быть кувшин заданного объема, чтобы стоимость его была минимальной ?

Пройдут годы, века, тысячелетия, а такая постановка задачи сохраняется независимо от того, что будут изготавливать. Иными словами, существует одна из двух задач принятия решений, например, в проектировании оптимальных конструкций:

- сделать изделие с заданными свойствами минимальной стоимости;
- сделать изделие заданной стоимости с максимальными свойствами.

Неправильное решение этих задач приводит к излишней трате сырья и времени, что всегда плохо. Допустим, что при интуитивном распределении людей на работы возможность их использования по сравнению с наилучшим вариантом, полученным с помощью ПК, ухудшается всего на 3%. Это очень небольшая ошибка, которую можно не всегда заметить. Такая ошибка, скажем, в суконном цехе XV века с 30 работающими привела бы к недоиспользованию одного человека. А в наши дни, если принять число занятых в народном хозяйстве 100 млн. человек, такая же ошибка аналогична увеличению числа безработных (снижению занятости) на 3 млн. человек.

2. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ И КЛАССИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

Чтобы человеку принять решение без ПК (персонального компьютера), зачастую ничего не надо. Есть вопрос, пускай даже не четкий, надумал и решил, правда, без гарантии правильности. ПК же никаких решений не принимает, а только подготавливает их для принятия человеком. Что нужно сделать, чтобы найти такие варианты решений (рис.1) ?

Рис. 1 Принятие решения с использованием ПК

Разработку любой модели оптимизации можно приблизительно разбить на пять стадий, частично перекрывающих друг друга и не имеющих четких границ. В большинстве случаев ими будут:

1. постановка (формулировка) задачи;
2. разработка математической модели изучаемой системы;
3. отыскание решения с помощью этой модели;
4. проверка данной модели и решения;
5. уточнение решения на практике.

При постановке задачи проводится предпроектное обследование объекта задачи, формулируется цель решения, ограничения, формы исходной и результатной информации, порядок ее преобразования и использования и т.д.

При разработке математической модели формализуется цель решения, с которой увязываются переменные величины и наличные ограничения, оценивается число возможных (допустимых) вариантов решения.

Собственно решению на ПК предшествует разработка алгоритма - формализованной последовательности действий по реализации модели (блок-схем решения задачи), по которой разрабатывается программа решения задачи на ПК или подбирается готовый программный продукт (ППП).

Далее сравнивается полученное решение с реальной действительностью, чтобы выяснить действительно ли решена реальная задача, все ли переменные в модели учтены, все ли ограничения формализованы, все ли изменения объекта внесены в модель и т.д.

Особенно важным в этих этапах представляется выбор цели решения. Например, установка зениток на торговых судах в Атлантике во второй мировой войне. Из 25 сбивался один самолет, что не окупало установку орудий. Но после установки зениток потопляемость судов уменьшилась в 2,5 раза. Ставить их или нет ? Сбивать самолеты или сохранять свои суда ?

Хорошую модель составить не просто. По словам Р.Беллмана: “Если мы попытаемся включить в нашу математическую модель слишком много черт действительности, то захлебнемся в сложных уравнениях, содержащих неизвестные параметры и неизвестные функции. Определение этих функций приведет к еще более сложным уравнениям с еще большим числом неизвестных параметров и функций и т.д.

Если же, наоборот, оробев от столь мрачных перспектив, построим слишком упрощенную модель, то обнаружим, что она не определяет последовательность действий так, чтобы удовлетворять нашим требованиям. Следовательно, Ученый, подобно Паломнику, должен идти прямой и узкой тропой между Западнями Переупрощения и Болотом Переусложнения”.

Добавим, что для обеспечения успеха моделирования надо выполнить три правила, которые, по мнению древних, являются признаком мудрости:

учесть главные свойства моделируемого объекта (например, Академик Чаплыгин как научный руководитель Центрального аэрогидродинамического института не утвердил в смету расходов на продувку в аэродинамической трубе петуха. Причина его решения была лаконично проста: “Петух не летает”. У девочки Кати для игры в “дочки-матери” моделируемый объект - кукла Барби, а для испытания парашюта - 100-килограммовый мешок с песком, а не наоборот.

пренебрегать его второстепенными свойствами;

уметь отделить главные свойства от второстепенных.

Например, перед нами стоит задача. Требуется определить, сколько у пятилетней девочки Маши, которая слушает папу, маму, дедушку, бабушку, каждое утро ест манную кашу, говорит “спасибо”, моет руки перед едой, было яблок, если дворник соседнего дома тетя Даша дала ей еще два яблока, а всего стало пять? ($x + 2 = 5$)

Во всех сферах человеческой деятельности большое место занимает принятие решений. Для постановки задачи принятия решения необходимо выполнить два условия.

1.Чтобы было из чего выбирать.

Очевидно, если нет хотя бы двух возможных вариантов решения, то выбрать нечего и задача принятия решения отсутствует. Так, если предприятию задан план, устанавливающий номенклатуру и количество выпускаемой продукции, то задачи определения плана нет: план задан.

2. Выбор варианта плана по определенному принципу.

Известны два принципа выбора: волевой и критериальный. Волевой выбор, наиболее часто используемый, применяют при отсутствии формализованных моделей как единственно возможный.

Критериальный выбор заключается в принятии некоторого критерия и сравнении возможных вариантов по этому критерию. Вариант, для которого принятый критерий является наилучшим, принимается. наилучшее решение (вариант) называют оптимальным (от лат. optimus), а задачу принятия наилучшего решения - задачей оптимизации.

Решение не может быть оптимальным вообще, во всех смыслах, а только в одном, единственном смысле, определяемом выбранным критерием. Критерий оптимизации называют целевой функцией (ЦФ), функцией цели, функционалом и др.

Любую задачу, решение которой сводится к нахождению максимума или минимума ЦФ, называют задачей оптимизации. Задачи экономики и организации производства связаны с нахождением условного экстремума ЦФ при известных ограничениях, накладываемых на ее переменные.

В качестве ЦФ при решении различных оптимизационных задач принимают количество или стоимость выпускаемой продукции, затраты на производство, сумму прибыли и т.п. Ограничения, как правило, - ресурсы: людские, материальные, денежные и т.п.

Цель классификации задач оптимизации - показать, что эти задачи, различные по своему содержанию, можно решать на ПК с помощью стандартных программных продуктов. Классификацию задач оптимизации, возникающих на производстве, можно выполнить по признакам: область применения; содержание задачи; класс ЭММ (табл.1).

Другой важный признак систематизации - классификация моделей по ее элементам: исходным данным, искомым переменным, зависимостям, описывающим цель задачи (моделирования) и ограничения (рис.2).

Таблица 1 – Классификация моделей по признакам

Область применения	Управление	Проектирование	Разработка технологии
Основные задачи	Различные задачи распределения ресурсов	Оптимизация параметров объекта проектирования Оптимизация структуры объекта проектирования Оптимизация функциони-	Оптимизация маршрута изготовления изделия Оптимизация параметров техпроцессов

		рования	

Исходные данные, которые заданы определенными величинами, называют детерминированными.

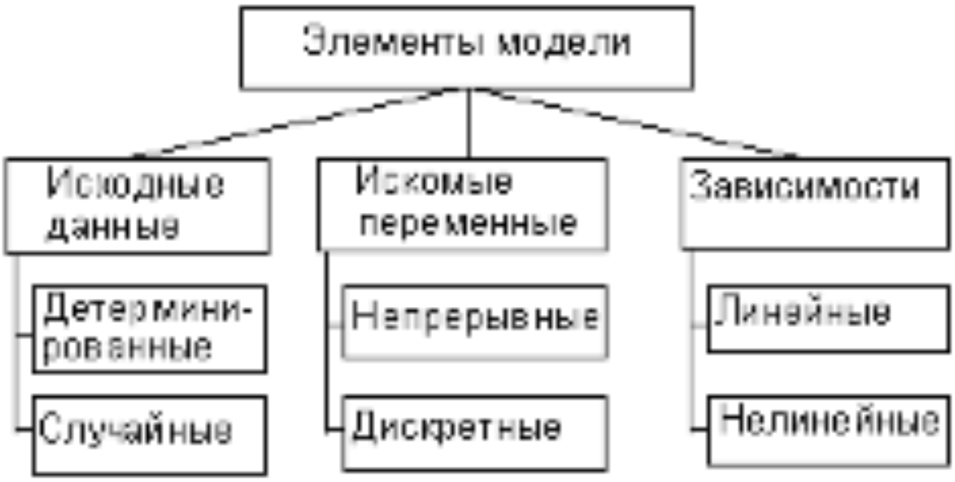


Рис.2 – Классификация моделей по элементам

Исходные данные, которые зависят от ряда случайных факторов, называют случайными величинами. Например, имеющееся наличие ресурсов зависит от своевременности их поставки, производительность оборудования зависит от его исправности и т.д.

Переменные величины могут быть непрерывными и дискретными. Непрерывные величины могут принимать в заданном интервале любые значения (например, процентное содержание элементов в марке материала). Дискретные или целочисленные принимают только целые значения (например, нельзя изготовить 1,3 изделия, ввести в эксплуатацию 1,5 здания).

Таблица 2 – Взаимосвязь методов решений и программных средств

Исходные данные	Переменные	Зависимости	Задача	Обозначение
Детермини-рованные	Непрерывные	Линейные	Линейного программирования	ЛП
	Целочисленные (дискретные)	Линейные	Целочисленного программирования	ЦП

	Непрерывные, целочисленные	Нелинейные	Нелинейного программирования	НЛП
Случайные	Непрерывные	Линейные	Стохастического программирования	СТП

Зависимости между элементами могут быть линейными и нелинейными. Линейными называют зависимости, в которые переменные входят в первой степени и нет их произведения. Если переменные входят не первой степени или есть произведение переменных, то зависимости нелинейные. Сочетание различных элементов модели приводит к различным классам задач оптимизации, которые требуют разных методов решения, а следовательно, и разных программных средств (табл.2).

За рубежом термин «экономико-математическое моделирование не применяют, а заменяют терминами «экономическая кибернетика», «исследование операций» и др.

Курс «Экономико-математические методы и модели» - это математическая дисциплина, изучающая экстремальные математические задачи и методы их решения.

В общем виде математическая постановка экстремальной задачи состоит в определении наибольшего или наименьшего значения ЦФ $f(x_1,x_2,...,x_j,...,x_n)$ при условиях $g_i(x_1,x_2,...,x_j,...,x_n) \le b_i$ $(i=1..m)$, где f, g_i - заданные функции; x_j $(j=1..n)$ - искомые переменные; b_i $(i=1..m)$ - некоторые действительные числа.

В зависимости от свойств функций f и g_i экономико-математические методы рассматривают как ряд самостоятельных разделов, изучающих методы решения определенных классов задач (рис. 3).

Прежде всего экономико-математические методы подразделяют на методы решения задач линейного и нелинейного программирования. При этом если все функции f и g_i линейные, или не содержат произведения искомых переменных, то соответствующая задача - задача линейного программирования (ЛП).

Если хотя бы одна из этих функций - нелинейная, или содержит произведения искомых переменных, то соответствующая задача - задача нелинейного программирования (НЛП).

Рис.3. Древо экономико-математических методов

Среди задач НЛП наиболее изучены задачи выпуклого программирования, в результате решения которых определяют минимум выпуклой (или максимум вогнутой) функции; заданной на выпуклом замкнутом множестве.

Из задач выпуклого программирования подробно разработаны задачи квадратичного программирования, в которых требуется найти максимум (или минимум) квадратичной функции при условии, что ее переменные удовлетворяют некоторой системе линейных неравенств и (или) линейных уравнений.

Отдельные разделы экономико-математических методов изучают методы решения задач целочисленного, параметрического, дробно-линейного программирования.

В задачах целочисленного программирования неизвестные могут принимать только целочисленные значения.

В задачах параметрического программирования ЦФ или функции, определяющие область возможных изменений переменных (ограничения и граничные условия), либо то и другое зависят от некоторых параметров.

В задачах дробно-линейного программирования ЦФ - отношение двух линейных функций, а функции, определяющие область возможных изменений переменных, также линейны.

В отдельные разделы выделены задачи динамического и стохастического программирования. Задача динамического программирования - задача, процесс нахождения решения которой является многоэтапным.

Если в ЦФ или в функциях, определяющих область возможных изменений переменных, содержатся случайные величины, то такую задачу относят к стохастическому программированию.

3. ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Значительная часть задач принятия решения - это задачи распределения ресурсов между объектами.

Пусть имеется m видов ресурсов, каждый i-й ресурс в количестве b_i ($i=1..m$). Эти ресурсы нужно использовать для n видов продукции. Для выпуска единицы j-го вида продукции необходимо a_{ij} единиц i-го вида ресурса. Требуется определить, сколько какого вида продукции следует произвести, чтобы такой выпуск был наилучшим для принятого критерия оптимальности.

В реальных задачах суммарное количество основных x_i ($j= 1..n$) и дополнительных y_i ($i= 1..m$) переменных всегда больше, чем число зависимостей m, поэтому система (1) имеет бесчисленное множество решений. Из этого бесчисленного множества следует выбрать одно - оптимальное, соответствующее критерию - цели решения задачи.

Цель задачи распределения ресурсов устанавливается какой-либо одной из двух взаимоисключающих постановок:

1. при заданных ресурсах максимизировать получаемый результат;

2. при заданном результате минимизировать потребные ресурсы.

Первая постановка аналитически запишется:

$$\left.\begin{array}{lr}
\max L = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j; & (1.1)\\
\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = 1..m); & (1.2)\\
d_j \le x_j \le D_j \quad (j = 1..n), & (1.3)
\end{array}\right\} \qquad (1)$$

где x_j - количество выпускаемой продукции j-го вида - искомая переменная ($j=1..n$); n - количество наименований продукции; c_j - величина, показывающая, какой вклад в результат дает единица продукции j-го вида; b_i - заданное количество ресурса i-го вида ($i=1..m$); m - количество наименований ресурсов; a_{ij} -

норма расхода ресурса, т.е. какое количество ресурса i-го вида потребляется на производство единицы j-го вида продукции.

Решение задачи (1) дает нахождение таких значений x_j, которые обеспечивают при заданных ресурсах получение максимального результата.

Вторая постановка задачи будет иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} &\min L = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j; && (2.1)\\ &\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ge C; && (2.2)\\ &d_j \le x_j \le D_j \quad (j = 1..n), && (2.3) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где С - минимально допустимое значение потребного результата.

Задачи (1) и (2), в которые переменные x_j входят в первой степени, т.е. в виде линейных зависимостей, называют задачами ЛП.

Каждая задача ЛП содержит ЦФ (1.1), (2.1), ограничения (1.2), (2.2), граничные условия (1.3), (2.3). Ограничения могут включать зависимости как для ресурсов (b_i), так и для экономических показателей (С).

Для решения задач ЛП используют графический и аналитический методы.

Пример 1. Пусть требуется определить план выпуска четырех видов продукции $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$, для изготовления которых необходимы ресурсы трех видов: трудовые, материальные, финансовые. Количество каждого i-го вида ресурса для производства каждого j-го вида продукции называют нормой расхода и обозначают a_{ij}. Количество каждого вида ресурса, которое имеется в наличии, обозначают b_i (табл.3).

Таблица 3 – Условия задачи

Ресурсы (i)	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	ресурса
	Удельный расход ресурсов (a_{ij})				(b_i)
Трудовые	1	2	3	4	40
Материальные	6	5	4	3	110

Финансовые	4	6	8	12	100
Граница: нижняя верхняя	 1 12	 0 -	 2 -	 3 3	 - -
План	x_1	x_2	x_3	x_4	-

Из таблицы 3 видно, что для выпуска единицы продукции, например, вида $П_2$, требуется две ед. трудовых ресурсов, ед. $П_3$ - четыре ед. материальных ресурсов и т.д.; предприятие располагает 100 ед. финансовых ресурсов, 40 ед. трудовых, исходя из спроса заданы верхние и нижние предельные границы выпуска каждого вида продукции. На основании исходных данных требуется составить математическую модель для определения плана выпуска продукции.

Решение: Обозначим: через x_1, x_2, x_3, x_4 - количество выпускаемой продукции видов $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$, которое надо найти.

Теперь составляем ограничения. Из табл.3 видно, что для выпуска ед. продукции $П_1$ требуется одна ед. трудовых ресурсов, $П_2$, $П_3$, $П_4$ - соответственно 2, 3, 4 ед. трудовых ресурсов. Тогда потребный трудовой ресурс для выпуска всех видов продукции будет равен $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$.

Очевидно, что потребный ресурс не может превышать располагаемый, т.е. для трудового ресурса справедливо неравенство

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \le 40,$$

где 40 - располагаемый ресурс (табл.3).

Если составить аналогичные зависимости для остальных видов ресурсов и добавить предельно-допустимые значения для выпуска каждого вида продукции, то получим систему:

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \le 40; \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 110; \\ 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 12x_4 \le 100; \\ 1 \le x_1 \le 12;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 2;\ x_4 = 3. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

В этой системе неравенства, устанавливающие зависимости для ресурсов - ограничения, а предельно-допустимые значения переменных - граничные условия. В ограничениях левые части неравенства - потребные ресурсы, а правые - располагаемые.

Если в неравенства ввести дополнительные переменные $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$, $y_3 \geq 0$, то можно записать

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + y_1 &= 40; \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + y_2 &= 110; \\ 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 12x_4 + y_3 &= 100. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

В этой системе дополнительные переменные - это разность между располагаемым ресурсом и потребным и, следовательно, равные неиспользуемому ресурсу, т.е. это резервы каждого вида ресурсов.

Очевидно, что система (4), содержащая три уравнения и семь переменных, имеет бесчисленное множество решений, т.е. различных вариантов плана. Все эти возможные варианты, удовлетворяющие системе (3), являются допустимыми планами.

Вывод. Если получить оптимальное решение очень важно, то иметь допустимое решение – необходимо.

Любая правильно составленная задача планирования (как и в данном примере) имеет бесчисленное множество допустимых решений. Какое из них выбрать ?

Чтобы ответить на этот вопрос, нужно сформулировать задачу оптимизации в какой-либо из двух взаимоисключающих постановок.

Обозначим: Q - ресурсы, R - результат их применения. Тогда при заданных зависимостях результата и потребных ресурсов от количества выпускаемой продукции $R = f(x_j)$, $Q = \varphi(x_j)$ обе постановки распределения ресурсов можно записать:

для первой постановки	для второй постановки
$L_1 = R \to \max;$	$L_2 = Q \to \min;$
$Q \leq Q_{пл}.$	$R \geq R_{пл},$

где $Q_{пл}$, $R_{пл}$ - заданные (плановые или прогнозируемые) значения ресурсов и результата.

Для составления модели в какой-либо постановке потребуются дополнительные данные: прибыль от реализации ед. продукции каждого вида и плановая прибыль в целом от производства всей продукции.

Пусть для продукции видов $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$ она составит соответственно 60, 70, 120 130, а суммарная прибыль от всего производства должна быть не менее 1000.

Тогда для первой постановки к системе (3) добавляем ЦФ и получаем математическую модель:

$$\max L_1 = 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4;$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \le 40;$$
$$6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 110;$$
$$4x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 12x_4 \le 100;$$
$$1 \le x_1 \le 12;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 2;\ x_4 = 3.$$

Для второй постановки:

$$\max L_2 = y_1 + y_2 + y_3;$$
$$60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4 \ge 1000;$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + y_1 = 40;$$
$$6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + y_2 = 110;$$
$$4x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 12x_4 + y_3 = 100.$$

Так как y_1, y_2, y_3 - резервы по ресурсам, то максимизация их суммы обеспечивает минимизацию используемых ресурсов.

В результате решения задачи в двух постановках (табл.4), видно, что эти результаты тоже различные.

Таблица 4 – Две постановки решения задачи

Постановка	ЦФ	Граничные условия	R	Q	η=R/Q	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3
1	$R \to \max$	$Q \le 250$	1350	180,5	7,48	1	0	7,5	3	4,5	65	0
2	$Q \to \min$	$R \ge 1000$	1002	137	7,31	1	0	4,6	3	13,2	76,6	23,2

В первой постановке max R_1=1350, общее количество использованных ресурсов Q=180,5. При этом ресурсы оказались подразделенными на две группы: лимитирующие, для которых y_i=0, и нелимитирующие, для которых y_i>0. К первой группе относят финансы, ко второй - трудовые и материальные. Значит, увеличение финансов приведет к увеличению прибыли, а рост трудовых и материальных - нет. Отсюда вывод: для увеличения выпуска продукции не требуется увеличение всех ресурсов, а только - лимитирующих (на практике - требуют всех).

Во второй постановке общее число использованных ресурсов Q_2=137 и для всех их видов есть резервы. Дальнейшее уменьшение ресурсов ограничено требованием прибыли (не менее 1000).

Проверка сбалансированности планов.

Представьте себе такую ситуацию. Директор завода вызывает к себе начальника цеха и говорит ему: “Надо сделать 20 болтов, но металл тебе никто не даст”. Очевидно, такого быть не может. Всем известно, что для того чтобы выпустить продукцию, необходимо иметь сырье.

Требование выпуска продукции без обеспечения его ресурсами - это ЧП. Нет, не то ЧП, которое “чрезвычайное происшествие, а то ЧП, которое “часто встречающееся положение”.

К сожалению, часто имеет место несбалансированность планов по номенклатуре, нормам расхода и обеспеченности ресурсами. Не вызывает сомнения, что работать по несбалансированным планам невозможно. Именно несбалансированный план порождает нарушения производственной дисциплины: либо его корректировку, либо приписки, так как выполнить его нельзя.

Сбалансированность планов по номенклатуре и ресурсов можно проверить с помощью моделирования на ПК, и ответ будет получен не в конце планового периода, когда изменить уже ничего нельзя, а сразу же при решении задачи. При этом необходимо использовать достоверную информационную базу, в частности, удельные нормы расхода ресурсов.

Именно математические модели позволяют проанализировать причины несбалансированности планов и выявить недостоверность исходных данных.

Пример 2. Покажем, как можно обеспечить условие сбалансированности на примере предыдущей задачи (первая постановка). Только теперь в связи с изменившимся спросом продукцию $П_1$ необходимо выпускать в количестве не менее 12, а $П_2$ - не менее 5 ед. Перепишем новое условие задачи (табл. 5).

Таблица 5 Изменяемые условия задачи

Ресурсы (i)	Вид продукции (j)				Располагаемый ресурс (b_i)
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	
	Удельный расход ресурсов (a_{ij})				
Прибыль на ед. продукции	60	70	120	130	-
Трудовые	1	2	3	4	40
Материальные	6	5	4	3	110
Финансовые	4	6	8	12	100
Граница:					
нижняя	12	5	2	3	-
верхняя	-	-	-	3	-
План	x_1	x_2	x_3	x_4	-

Решение:

Из таблицы 5 не видно, вызывает ли такое дополнительное условие несбалансированность плана. Для ответа на этот вопрос составим математическую модель новой задачи:

$$\max L_1 = 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4;$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \le 40;$$
$$6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 110;$$
$$4x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 12x_4 \le 100;$$
$$x_1 \ge 12;\ x_2 \ge 5;\ x_3 \ge 2;\ x_4 = 3.$$

В результате решения этой задачи на ПК окажется, что задача не имеет решения, так как она не сбалансирована по ресурсам. Например, по материальным ресурсам (второе ограничение): для проверки сбалансированности подставим вместо x_j (j=1..4) значения, равные нижним границам этих переменных, т.е. проверим, хватит ли материальных ресурсов для выполнения плана на нижнем пределе допустимых значений. При этом потребный ресурс составит:

6*12 + 5*5 + 4*2 + 3*3 = 114, что больше располагаемого, равного 100.

Аналогично можно проверить и по другим видам ресурсов (самостоятельно).

Что же делать, если план не сбалансирован (хотя бы даже по одному из видов ресурсов), хотя данная постановка правильно описывает реальную экономическую ситуацию? Попробуем обратиться за помощью к ПК (конечно, не в расчете, что ПК заменит недостающие ресурсы) для анализа подобных несбалансированных задач.

При постановке любой задачи распределения ресурсов до получения решения неизвестно (естественно) сбалансирована она или нет. Поэтому в том случае, когда есть подозрение, что задача может оказаться несбалансированной, имеет смысл сразу же составить модель с учетом возможной недостачи ресурсов. В такой модели отличия будут в ограничениях по ресурсам, которые можно представить так:

$$\left.\begin{array}{c} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \le 40 + y_1; \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 110 + y_2; \\ 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 12x_4 \le 100 + y_3; \\ y_1 \ge 0;\ \ y_2 \ge 0;\ \ y_3 \ge 0, \end{array}\right\}$$

где y_1, y_2, y_3 - количество необходимого дополнительного ресурса каждого вида.

Вывод. Если в результате решения окажется, что какое-то y_i=0, значит по этому виду дополнительных ресурсов не потребуется.

В том случае, если мы хотим минимизировать дополнительные ресурсы, ЦФ min L = $y_1 + y_2 + y_3$. Так как ЦФ может быть только одна, а нас интересует размер получаемой прибыли, включим ее значение в систему и окончательно сформулируем новую задачу:

$$\min L = y_1 + y_2 + y_3;$$
$$60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4 \geq 0;$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - y_1 \leq 40;$$
$$6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 - y_2 \leq 110;$$
$$4x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 12x_4 - y_3 \leq 100;$$
$$x_1 \geq 12;\ x_2 \geq 5;\ x_3 \geq 2;\ x_4 = 3;\ y_1 \geq 0;\ y_2 \geq 0;\ y_3 \geq 0.$$

Результаты решения этой задачи (табл.6) показывают сколько и какого вида ресурса требуется, если будет добавлен необходимый ресурс дополнительно.

Таблица 6 – Результаты решения задачи

Показатель	y_1	y_2	y_3	Суммарный доп. ресурс	x_1	x_2	x_3	x_4	Максимальная прибыль
Значение	0	4	30	34	12	5	2	3	1700

В нашем примере трудовой ресурс достаточен и используется полностью. Вся продукция выпускается на нижней границе. При этом будет получена прибыль 1700. Вот что дает решение несбалансированной задачи на ПК, которая, конечно, не заменила дополнительные ресурсы, но показала, что нужно для выполнения несбалансированного плана. Переоценить пользу такого анализа - вряд ли возможно.

Следовательно, один из методов преодоления несбалансированного плана - привлечение дополнительных ресурсов. А если ресурсы добавить нельзя, можно ли получить сбалансированный план ?

Так как планирование - это решение математической задачи, а в математике чудес не бывает, то на этот вопрос мы ответим утвердительно. Да, можно! Но...

Но должен быть выполнен один из двух вариантов:

- уменьшение нижнего предела выпуска;
- уменьшение нормы расхода каждого ресурса.

Требования совместности условий.

Вспомним некоторые вопросы из алгебры. Рассмотрим неравенство $a \cdot x \leq b$. Если от неравенства мы хотим перейти к уравнению, то введем дополнительную переменную y и запишем $a \cdot x + y = b$, т.е. получили одно уравнение с двумя неизвестными.

В общую постановку задачи оптимизации входят неравенства вида $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1..m)$, где n - число неизвестных; m - число неравенств. Если в каждое неравенство добавить неотрицательное неизвестное $y_i \geq 0 \quad (i = 1..m)$, то от системы неравенств можно перейти к системе уравнений $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i = b_i \quad (i = 1..m)$.

В этой системе общее число неизвестных N=n+m, где n - число основных неизвестных x_j; m - число дополнительных неизвестных y_i, которое равно числу уравнений.

Возможны три варианта соотношения величин N и m.

1. Число неизвестных меньше, чем число уравнений: N<m.

Например, $\begin{cases} 2x_1 = 4 \\ x_1 = 5 \end{cases}$, т.е. N=1, m=2. Очевидно, эта система решения не имеет, т.е. нет таких значений x_1, которые бы удовлетворяли обоим уравнениям. В этом случае говорят, что система условий несовместна. Значит, если число неизвестных N меньше числа уравнений m, то система решения не имеет и является несовместной.

2. Число неизвестных равно числу уравнений: N=m.

Например, $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$. Нетрудно найти, что решением этой системы будут значения x_1=2, x_2=1. Таким образом, линейная система, в которой число неизвестных N равно числу уравнений m, имеет одно решение.

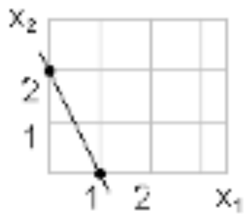
Вывод. Наличие (2) или отсутствие решений (1) при различных соотношениях числа переменных N и числа уравнений m справедливо только для линейно-независимых уравнений, которые не могут быть получены умножением, делением, сложением, вычитанием исходных уравнений.

Например, пусть есть уравнение 2x=10, из которого можно получить несколько: x=5; 4x=20; 6x=30 и т.д. Все эти уравнения будут линейно зависимыми, и новых сведений о зависимостях для переменной не содержат. Поэтому в этом примере m=1 (а не 4).

Аналогично в системе

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 7; & (а) \\ 3x_1 + 2x_2 = 8; & (б) \\ 5x_1 + 5x_2 = 15; & (в) \\ x_1 + x_2 = 3. & (г) \end{cases}$$

есть только два линейно независимых уравнения, так уравнение (в) есть результат суммирования (а) и (б), а уравнение (г) есть результат деления (в) на 5.



3. Число неизвестных больше числа уравнений: N>m.

Рис.4 – Прямая решения

Например, $2x_1 + x_2 = 2$. Очевидно, что все значения x_1 и x_2, лежащие на прямой (рис.4) этого уравнения, являются его решением. Значит это уравнение имеет бесчисленное множество решений. Итак, если в системе число неизвестных N больше числа уравнений m, то такая система имеет бесчисленное множество решений.

В случае, когда система имеет более одного возможного решения, может быть поставлена задача оптимизации. При этом суть такой задачи, как мы уже знаем, заключается в том, чтобы из всех допустимых решений, удовлетворяющих ограничениям и граничным условиям, выбрать такое, которое придает ЦФ оптимальное, т.е. максимальное или минимальное значение.

Если все ограничения и ЦФ линейны, задача оптимизации, как нам известно, является задачей ЛП.

4. **ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛП**

Вспомним построение линейных зависимостей. Начнем с уравнений.

Линейное уравнение с двумя переменными может быть записано $a_1x_1+a_2x_2=b$. Чтобы построить это уравнение, найдем точки пересечения с осями координат. При $x_1=0$ получим $a_2x_2 = b$, откуда $x_2 = b/a_2$. При $x_2=0$ будем иметь $a_1x_1=b$ и $x_1=b/a_1$ (рис.5).

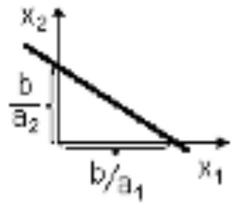


Рис.5 -Построение решения задачи

Разделим теперь левую и правую части уравнения на b и перепишем уравнение $\frac{a_1x_1}{b}+\frac{a_2x_2}{b}=1$, или $\frac{x_1}{b/a_1}+\frac{x_2}{b/a_2}=1$, или $\frac{x_1}{\alpha_1}+\frac{x_2}{\alpha_2}=1$, которое называют уравнением прямой в отрезках. Такое представление уравнения удобно для построения прямой, так как величины α_1 и α_2 - это отрезки, отсекаемые прямой на тех осях, которые указаны в числителе. Например, $2x_1+x_2=2$ или в форме уравнения в отрезках: $\frac{x_1}{1}+\frac{x_2}{2}=1$, т.е. $\alpha_1=1$, $\alpha_2=2$ (рис.6).

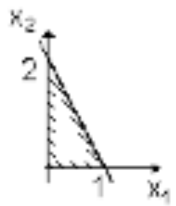


Рис.6 – Уравнение в отрезках

Теперь вспомним неравенства. Если линейное уравнение с двумя переменными $2x_1+x_2=2$ может быть представлено прямой на плоскости, то неравенство $a_1x_1+a_2x_2 \le b$ изображается как полуплоскость.

Так неравенство $2x_1+x_2 \le 2$ представляет собой заштрихованную полуплоскость, координаты всех точек которой, т.е. x_1 и x_2 удовлетворяют заданному равенству. Значит, эти значения составляют область допустимых решений (ОДР).

Рассмотрим построение системы линейных неравенств:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 14; \\ 3x_1 + 4x_2 \le 18; \\ 6x_1 + 2x_2 \le 27; \\ x_1, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

или в форме, аналогичной уравнениям в отрезках

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{14} + \dfrac{x_2}{7/2} \le 1; \\ \dfrac{x_1}{6} + \dfrac{x_2}{9/2} \le 1; \\ \dfrac{x_1}{9/2} + \dfrac{x_2}{27/2} \le 1; \\ x_1, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

Построим каждое неравенство в системе координат x_1, x_2 в виде соответствующих полуплоскостей (рис.7).

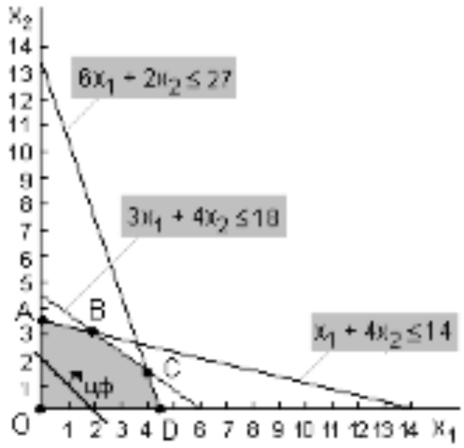


Рис. 7 – Графическое решение классической задачи ЛП

Решение этой системы неравенств - координаты всех точек, принадлежащих ОДР, т.е. АВСДО. Так как в ОДР бесчисленное множество точек, значит рассматриваемая задача имеет бесчисленное множество допустимых решений.

Вывод. Не любая система линейных неравенств имеет ОДР, т.е. допустимые решения.

Например, построим систему (рис.8):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1; \\ x_1 \ge 2; \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

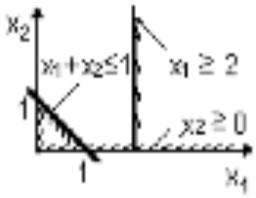


Рис. 8 – Пример задачи без решений

Из рис.8 видно, что нет таких точек, которые бы удовлетворяли всем неравенствам системы.

До сих пор рассматривали линейные уравнения и неравенства с двумя переменными. Если перейти к линейным зависимостям с тремя переменными, то тогда они будут описывать плоскость в трехмерном пространстве; линейное неравенство характеризует полупространство, а система линейных неравенств - многогранник как ОДР в трехмерном пространстве.

С увеличением числа переменных выше трех, геометрическая интерпретация невозможна, но система неравенств - ОДР в k-мерном пространстве.

При этом мерность пространства определяют как: если ограничения заданы неравенствами, то k=n, где n - число переменных; если ограничения в виде уравнений, то k=n-m, где m - число уравнений.

Если мы хотим найти оптимальное решение, то должны принять ЦФ. Допустим, мы хотим, чтобы решение было оптимальным в смысле максимизации выпуска в целом. Тогда ЦФ: max $L=x_1+x_2$.

Положим L, равной какому-либо числу (любому), например 2, и построим уравнение ЦФ: $\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} = 1.$

Так как нам требуется найти оптимальное решение, при котором достигается max L, будем перемещать линию ЦФ в направлении увеличения L. Очевидно, что оптимальным решением будут координаты точки С равные x_1^*, x_2^*. При этом $L=L^*$.

Вывод. Отсюда можно сделать исключительно важный вывод: оптимальное решение - координаты вершины ОДР.

Из этого вывода следует метод решения задач ЛП, который заключается в следующем:

1. Найти вершины ОДР как точки пересечения ограничений.
2. Определить последовательно значения ЦФ в вершинах.
3. Вершина, в которой ЦФ приобретает оптимальное (max или min) значение, является оптимальной вершиной.
4. Координаты оптимальной вершины есть оптимальные значения искомых переменных.

5. СИМПЛЕКС-МЕТОД И ДВОЙСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ

Пример 3. Рассмотрим задачу (табл.7) оптимизации плана производства с целью получения максимальной прибыли.

Таблица 7 – Задача оптимизации плана производства

Величины	Норма расхода ресурсов				Запас ресурса
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	
Ресурсы:					
Трудовые	1	1	1	1	16
Сырье	6	5	4	3	110
Оборудование	4	6	10	13	100
Прибыль	60	70	120	130	-
План	x_1	x_2	x_3	x_4	-

Решение:

Математическая модель задачи:

$$\max L_1 = 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4;$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_1 = 16;$$
$$6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + y_2 = 110;$$
$$4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4 + y_3 = 100;$$
$$x_j \geq 0\ (j = 1..4);\ y_i \geq 0\ (i = 1..3).$$

В ограничения задачи введем дополнительные переменные y_1, y_2, y_3 и перепишем условие задачи в виде уравнений:

$$\max L_1 = 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4;$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_1 = 16;$$
$$6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + y_2 = 110;$$
$$4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4 + y_3 = 100;$$
$$x_j \geq 0\ (j = 1..4);\ y_i \geq 0\ (i = 1..3).$$

Эту постановку можно переписать в следующем виде:

коэффициенты при свободных переменных в индексной строке первой симплекс-таблицы

$$\max L_1 = 0 - (\boxed{-60}\,x_1 \boxed{-70}\,x_2 \boxed{-120}\,x_3 \boxed{-130}\,x_4);$$

столбец свободных членов

базисные переменные в первом решении

$$\begin{aligned} \boxed{y_1} &= \boxed{16} - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4);\\ \boxed{y_2} &= \boxed{110} - (6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4);\\ \boxed{y_3} &= \boxed{100} - (4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4); \end{aligned}$$

матрица коэффициентов при свободных переменных в первой симплекс-таблице

$$x_j \ge 0\ (j=1..4);\ y_i \ge 0\ (i=1..3)$$

Последнюю постановку можно представить в виде таблицы (табл.8.1) - первой таблицы симплекс-метода.

Таблица 8.1

Базис	Свободные члены	Свободные переменные			
		x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	16	1	1	1	1
y_2	110	6	5	4	3
y_3	100	4	6	10	13
Индексная строка	0	- 60	-70	-120	-130

Таблица 8.2

Базис	Свободные члены	Свободные переменные			
		x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	108/13	9/13	7/13	3/13	0
y_2	1130/13	66/13	47/13	22/13	0
x_4	100/13	4/13	6/13	10/13	1
Индексная строка	1000	-20	-10	-20	0

Таблица 8.3

Базис	Свободные члены	Свободные переменные			
		x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	12	1	7/9	1/3	0
y_2	26	0	-1/3	0	0
x_4	4	0	2/9	26/39	1
Индексная строка	1240	0	50/9	- 40/3	0

Таблица 8.4

Базис	Свободные члены	Свободные переменные			
		x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	10	1	1/18	0	...
y_2	26	0	-1/3	0	...
x_3	6	0	13/6	1	...
Индексная строка	1320	0	70/9	0	...

Правила составления симплекс-таблиц

Для первой таблицы:

1. В первый столбец записывают y_i - базисные переменные, которые находятся в уравнениях слева.
2. Свободные переменные x_j, заключенные в скобках, выносят в верхнюю строку таблицы.
3. В остальные столбцы записывают коэффициенты перед свободными переменными.
4. Индексная строка есть результат вычитания из нуля коэффициентов перед свободными переменными.

Для последующих таблиц(8.2, 8.3, 8.4):

1. Выбирается наименьший отрицательный элемент в индексной строке при отыскании максимума, но наибольший положительный - при отыскании минимума, исключая вектор свободных членов.
2. Этот элемент определяет ключевой вектор-столбец, и он вводится в базис.
3. Компоненты вектора свободных членов делятся на положительные элементы ключевого столбца.
4. Из полученных отношений выбирается наименьшее.
5. Вектор-строка, содержащая наименьшее положительное частное - ключевая и выводится из базиса.
6. На пересечении ключевых строк и столбца находится разрешающий элемент.
7. Преобразование матрицы:

7.1.Каждый элемент ключевой строки делится на разрешающий элемент. Полученные частные являются элементами ключевой строки следующей таблицы.

7.2.Ключевой столбец в новой таблице - нули, за исключением разрешающего элемента.

7.3.Остальные элементы новой таблицы рассчитываются по схеме:

$$\begin{matrix}\text{Новый}\\\text{элемент}\end{matrix} = \begin{matrix}\text{Старый}\\\text{элемент}\end{matrix} - \frac{\text{Эл. кл. строки} \; * \; \text{Эл. кл. Столбца}}{\text{Разрешающий элемент}}$$

7.4.Если нулевая строка (столбец) содержит нуль, то соответствующий столбец (строка) в новой таблице не изменится.

Пп. 1-7 повторяются до тех пор, пока в индексной строке не останется ни одного отрицательного элемента при отыскании максимума (но ни одного положительного при отыскании минимума).

Из последней таблицы видно:

1. В столбце свободных членов все элементы положительны. Это значит, что полученное решение является допустимым.
2. В индексной строке все элементы также положительны. Это значит, что полученное решение - оптимально, т.е. максимизирует ЦФ. При этом оптимальным планом будут величины: $x_1^0=10$, $x_3^0=6$ (значит они базисные); $x_2^0=x_4^0=0$ (так как они свободные). При этом ЦФ L=1320.

Из этой таблицы также следует, что базисная переменная $y_2=26$, а свободные переменные $y_1=y_3=0$, т.е. в оптимальном плане резервы трудовых ресурсов и оборудования равны нулю, так как они используются полностью. А резерв ресурсов сырья $y_2=26$, что свидетельствует об его излишках.

Двойственные задачи ЛП. Каждой задаче ЛП можно некоторым образом сопоставить другую задачу ЛП, называемую двойственной по отношению к исходной (прямой):

Прямая задача (ПЗ)	Двойственная задача (ДЗ)
$\begin{cases} \max(\min)L_1 = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad (i = 1..m); \\ x_j \ge 0 \quad (j = 1..n). \end{cases}$	$\begin{cases} \max(\min)L_2 = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i z_i; \\ \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}z_i \ge C_j \quad (j = 1..m); \\ z_i \ge 0 \quad (i = 1..m). \end{cases}$

ДЗ по отношению к прямой составляют согласно правилам:

1) ЦФ ПЗ задается на max, тогда ЦФ ДЗ - на min, и наоборот.

2) Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, составленная из коэффициентов в системе ограничений ПЗ, и аналогичная матрица $A^{т} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2m} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ в ДЗ получаются друг из друга транспонированием.
3) Число переменных в ДЗ (m) равно числу соотношений (ограничений) в ПЗ, а число ограничений ДЗ (n) - числу переменных в ПЗ.
4) Коэффициенты при неизвестных в ЦФ ДЗ - свободные члены (b_i), а правые части в ограничениях ДЗ (c_j) - коэффициенты при неизвестных в ЦФ ПЗ.
5) Если переменная x_j ПЗ может принимать только положительные значения ($x_j \geq 0$), то j-е условие ДЗ - условие неравенства вида “≥“. Если i-е соотношение в ПЗ - неравенство, то i-я переменная ДЗ $z_i \geq 0$.

Вывод. Если ПЗ имеет решение, то и ДЗ тоже имеет решение, причем max(min) L1 = min(max) L2. Поэтому достаточно для отыскания оптимума решить одну какую-либо из задач двойственной пары, обычно решают ту, которая проще.

Оптимальный план двойственной задачи позволяет оценить степень дефицитности ресурсов, потребляемых при выполнении оптимального плана исходной задачи.

Пример 4. Для производства изделий А, В, С используются три различных вида ресурсов. Каждый из видов ресурсов может быть использован в количестве соответственно не большем 180, 210, 244 ед. Известны затраты каждого из видов ресурсов на ед. продукции и цена ед. продукции каждого вида (табл. 2.10).

Определить план производства, при котором обеспечивается максимальный доход, и оценить дефицитность каждого из видов ресурсов, используемых для производства продукции.

Таблица 9 – Условие задачи

Вид ресурса	Норма расхода ресурса (ед.изм.) на ед. продукции		
	A	B	C
1	4	2	1
2	3	1	3
3	1	2	5
Цена продукции	10	14	12

Оценки, приписываемые каждому из видов ресурсов, должны быть такими, чтобы оценка всех используемых ресурсов была минимальной, а суммарная оценка ресурсов на производство единицы продукции каждого вида - не меньше цены единицы продукции данного вида.

Решение: Обозначим через x_1 искомый план производства изделий А, через x_2 - В, x_3 - С, а через z_1 двойственную оценку дефицитности первого вида ресурса, через z_2 - второго, z_3 - третьего. Тогда прямая и двойственная задачи формулируются:

ПЗ	ДЗ
$\max L_1 = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3$	$\min L_2 = 180z_1 + 210z_2 + 244z_3;$
$4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 180;$	$4z_1 + 3z_2 + z_3 \ge 10;$
$3x_1 + x_2 + 3x_3 \le 210;$	$2z_1 + z_2 + 2z_3 \ge 14;$
$x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 180;$	$z_1 + 3z_2 + 5z_3 \ge 12;$
$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$	$z_1, z_2, z_3 \ge 0.$

Решение ПЗ дает оптимальный план производства изделий А, В, С, а решение ДЗ - оптимальную систему оценок ресурсов, используемых для производства этих изделий:

$$x_1^0 = 0;\quad x_2^0 = 82;\quad x_3^0 = 16;\quad \max L_1 = 1340;$$

$$z_1^0 = 5{,}75;\ z_2^0 = 0;\quad z_3^0 = 1{,}25;\ \min L_2 = 1340.$$

Исходя из анализа оптимальных двойственных оценок можно сделать следующие выводы.

- Ресурсы первого и третьего вида используются полностью. Полному использованию этих ресурсов соответствуют полученные оптимальные оценки z_1^0, z_3^0, отличные от нуля, т.е. положительные двойственные оценки имеют ресурсы, полностью потребляемые при оптимальном плане производства. Значит, ресурс второго вида недоиспользуется (на 80 ед.) Таким образом, *двойственные оценки определяют дефицитность используемых ресурсов*.
- Более того, *величина двойственной оценки показывает, на сколько возрастает максимальное значение ЦФ ПЗ при увеличении количества соответствующего ресурса на 1 ед.* Так, увеличение количества ресурса первого вида на 1 ед. приведет к тому, что появится возможность найти новый оптимальный план производства изделий, при котором общий доход возрастает на 5,75 д.е. и станет равным 1340 + 5,75 = 1345,75 д.е. Анализ полученных оптимальных значений новой ПЗ показывает, что это увеличение общего дохода достигается за счет увеличения производства изделий B на 0,625 ед. и сокращения выпуска изделий C на 0,25 ед. Вследствие этого использование ресурса второго вида уменьшается на 0,125 ед.

Точно также увеличение на 1 ед. количества ресурсов третьего вида позволит перейти к новому оптимальному плану производства, при котором доход возрастает на 1,25 д.е. и составит 1340+1,25=1341,25 д.е., что достигается за счет увеличения выпуска изделий C на 0,25 ед. и уменьшения выпуска B на 0,25 ед., причем объем используемого ресурса второго вида возрастает на 0,625 ед.

- При подстановке оптимальных двойственных оценок в систему ограничений ДЗ получаем:

$$4 * 5.75 + 1.25 > 10;$$

$$2 * 5.75 + 1.25 = 14;$$

$$5.75 + 5 * 1.25 = 12.$$

Первое ограничение выполняется как строгое неравенство, т.е. двойственная оценка всех ресурсов на производство единицы изделия А выше цены этого изделия и, следовательно, выпускать его невыгодно. Его производство и не предусмотрено оптимальным планом ПЗ.

При одновременном изменении ресурсов всех видов на величину Δb_i ($i=1..m$) можно оценить их суммарное влияние на значение ЦФ (при условии неизменности двойственных оценок в новой ДЗ относительно оценок в первоначальной ДЗ):

$\Delta L=\sum_{i=1}^{m} \Delta b_i z_i^0$, где Δb_i - величина возможного (при сохранении оптимального плана первоначальной ДЗ) изменения (увеличения или уменьшения) ресурса i-го вида.

6. РАЗНОВИДНОСТИ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Первые упоминания о линейных уравнениях возникли еще за несколько веков до нашей эры. В Древней Греции Диофант (II-IIIв.) формулирует уравнения, в которых искомые переменные - целые. Например, для уравнения первой степени, $a_0+a_1x_1=0$, где a_0, a_1 - целые, решение $x_1 = -a_0/a_1$ - целое, если a_0/a_1 - без остатка. Т.е. такое уравнение не всегда разрешимо в целых числах.

Из двух уравнений $3x_1-27=0$ и $5x_2+21=0$ только первое имеет целое решение: $x_1=27/3=9$, а второе - нет, так как $x_2=-21/5$.

Для уравнения с двумя неизвестными: $a_1x_1+a_2x_2=0$, где a_1, a_2 - целые, решение будет $x_1=-(a_2/a_1)x_2$. Например, $10x_1- 5x_2=0$ или $x_1 = 0{,}5x_2$ (*).

Из этого примера можно сделать следующие выводы: уравнение имеет бесчисленное множество решений, так как n>m; решение - целое, если x_2 - четное.

Для того, чтобы из множества допустимых решений выбрать одно - оптимальное, необходимо, как нам уже известно, добавить к условию (*) ЦФ. Задачи оптимизации, в которых решение должно быть в целых числах, называют задачами целочисленного программирования. Если в этой задаче ЦФ и ограничения - линейные зависимости, то ее называют целочисленной задачей ЛП; если же хотя бы одна зависимость будет нелинейной, то такая задача формулируется как целочисленная нелинейного программирования.

Большинство практических задач принятия решения сводятся, как правило, к целочисленным задачам линейного программирования (для краткости, ЦП).

Вывод. Если к условию (*) добавить такие, например, граничные условия: $2 \le x1 \le 8$; $1 \le x2 \le 3$, то можно видеть, что такая система решения не имеет. Отсюда следует, что задача ЦП не всегда имеет решение, т.е. она не совместна.

Целочисленное программирование. Под целочисленным или дискретным программированием понимают такие задачи (обычно линейные), в которых искомые переменные по смыслу могут принимать только целые значения: число рабочих, разделяемых по рабочим местам, количество единиц оборудования, устанавливаемых на заданной площади и т.п.

Аналитическая задача ЦП формулируется:

$$
\begin{aligned}
&\max(\min)L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j; \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = 1..m); \\
&d_j \le x_j \le D_j \quad (j = 1..n); \\
&\text{где } x_j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \text{ целые } (j=1..n_1 \le n).
\end{aligned}
$$

Если n_1=n, то задачу называют полностью целочисленной; если n_1<n, то - частично-целочисленной (ЧЦП).

Рис. 9 – Многогранник целочисленной задачи

Предположим, что задача имеет многогранник решений (рис.9). Если наложить требование целочисленности, то допустимое множество решений выразится в систему точек и уже не является выпуклым.

Если добавить новые ограничения, связывающие внешние целочисленные точки, а затем в качестве многогранника использовать все выпуклое множество, ограниченное осями координат и новым контуром, то получим новую задачу ЛП со следующими свойствами:

1. Новый многогранник решений содержит все целые точки, заключавшиеся в первоначальном многограннике решений; любая его угловая точка целая.
2. Так как ЦФ достигает оптимума в угловой точке, то построением многогранника обеспечивается целочисленность оптимального решения.

Таким образом решение задач ЦП - трудоемко. Поэтому по возможности лучше не накладывать ограничений целочисленности переменных.

В ряде случаев задачу ЦП решают следующим образом: как непрерывную задачу ЛП; округляют переменные; проверяют допустимость округленного решения; если решение допустимое, то оно принимается как целочисленное.

При необходимости точного решения применяют специальные методы, где учитывается, что множество решений любой целочисленной задачи - конечно. Например, в задаче с переменными x_1, x_2: $0<x_1\leq 4$; $0<x_j\leq 5$. Число возможных решений 4*5=20. Следовательно возможен полный перебор всех возможных сочетаний целочисленных x_1, x_2 и выбор из них наилучших в смысле ЦФ. Трудоемкость этого метода возрастает с ростом числа переменных и области граничных условий, и для реальных задач неприменим.

Поэтому в реальных задачах применяют методы, в которых не рассматривают все возможные альтернативы. Распространены методы отсечений и методы возврата, среди которых наиболее известен метод ветвей и границ. Метод отсечений для программной реализации сложен.

Метод ветвей и границ. Задача ЛП решается без учета целочисленности. Такая задача называется непрерывной. Далее рассматривают одну из переменных x_j, на которую накладывают ограничение целочисленности, но которая получила дробное значение. На основе полученного решения составляют дополнительные ограничения:

$x_j \leq [\, x_j^*]$ и $x_j \geq [x_j^*]+1$, где $[\, x_j^*]$ - целая часть нецелочисленного значения переменной x_j^* в оптимальном решении, и затем решаются еще две задачи ЛП, в каждую из которых вошли все исходные ограничения и одно из дополнительных.

Полученное решение новых задач проверяют на целочисленность переменных. Если решение не удовлетворяет требованию целочисленности, на основе каждой из задач составляют две новые аналогично предыдущим и т.д.

Если одно из решений удовлетворяет требованию целочисленности, значение ЦФ принимается за граничное $L_{гр}$. При этом рассмотрение других задач продолжается до тех пор, пока не будет получено:

1. на одной из ветвей недопустимое решение;
2. на одной из ветвей целочисленное решение. Тогда значение ЦФ сравнивается с $L_{гр}$ (верхним - при max, нижним - при min); если полученное значение хуже, оно отбрасывается; если - лучше, то принимается за граничное;
3. на одной из ветвей нецелочисленное решение, однако при этом значение ЦФ хуже граничного. Тогда дальнейшее рассмотрение также прекращается.

На первом цикле расчета

$$L_{гр} = \begin{cases} -\infty & \text{при } \max L; \\ +\infty & \text{при } \min L. \end{cases}$$

Таким образом для получения целочисленного решения методом ветвей и границ приходится решать большое число задач ЛП, причем в каждом очередном ветвлении число ограничений увеличивается на 1. Поэтому время решения задачи ЦП по сравнению с непрерывной значительно увеличивается.

Пример 5. $\max L = 7x_1 + 3x_2;$

$$5x_1 + 2x_2 \le 20;$$
$$8x_1 + 4x_2 \le 38;$$
$$x_1, x_2 \ge 0 \text{ - целые.}$$

Решение:

В результате решения задачи симплекс-методом найдем оптимальное решение: $x_1^{1*}=1$; $x_2^{1*}=7{,}5$; $L_1=29{,}5$; где верхний индекс переменных - номер задачи.

В полученном решении $x_2=7{,}5$ - нецелочисленное. Поэтому для дальнейшего решения составляем две новые задачи с различными граничными условиями.

Задача 2 :	Задача 3 :
$\max L = 7x_1 + 3x_2;$	$\max L = 7x_1 + 3x_2;$
$5x_1 + 2x_2 \le 20;$	$5x_1 + 2x_2 \le 20;$
$8x_1 + 4x_2 \le 38;$	$8x_1 + 4x_2 \le 38;$
$x_1 \ge 0;$	$x_1 \ge 0;$

$0 \le x_2 \le 7.$ $\qquad\qquad\qquad$ $x_2 \ge 8.$

Результаты решения симплекс-методом задачи 2: $x_1^{2*}=1,2$; $x_2^{2*}=7$; $L_2=29,4$; задачи 3: $x_1^{3*}=0,75$; $x_2^{3*}=8$; $L_3=29,25$.

В задаче 1 переменная $x_1^1=1$ - целочисленная, а в последующих задачах при целочисленности x_2 x_1 перестала быть целочисленной. Затем следует накладывать ограничения целочисленности на x_1 и т.д. (рис.10).

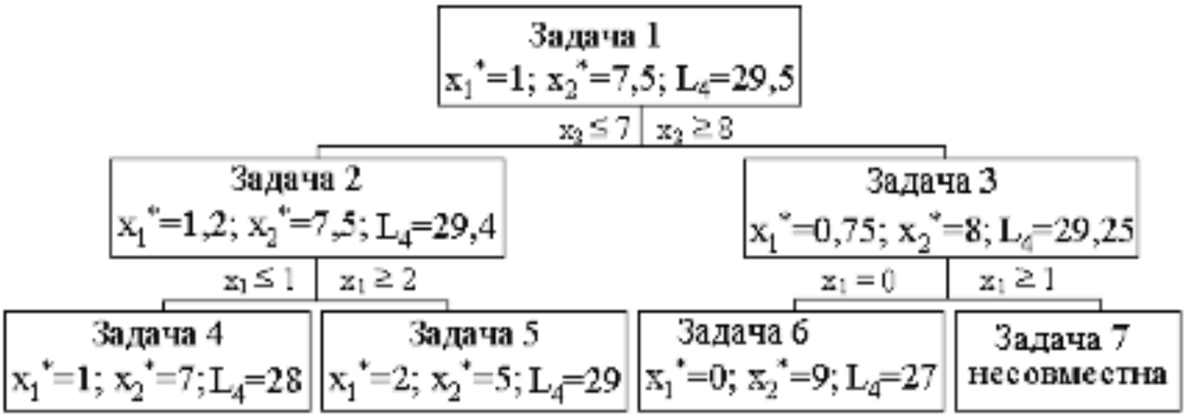


Рис.10 – Задачи целочисленного программирования

Результаты решения непрерывной и целочисленной задач вводятся в табл. 10.

Таблица 10 - Результаты решения непрерывной и целочисленной задач

N задачи	x_1	x_2	L
1	1	7,5	29,5
4	1	7	28
5	2	5	29
6	0	9	27

В качестве оптимального принимается решение задачи 5, которое дает наибольшее из целочисленных решений значение ЦФ.

Недостатки метода:

1. Из примера видно, что метод ветвей и границ достаточно трудоемкий. При этом оптимальное решение может быть получено в результате сравнения

всех допустимых целочисленных решений.

2. Поэтому при решении задач реальной размерности может потребоваться память, не имеющаяся даже у современных ПК или потребоваться практически неприемлемое время решения.

Обязательное условие метода - наличие верхних границ на значения переменных D_j. Если D_j не назначена, то ее определяют по зависимости:

$$D_j = \min_{i=1..m} \left\{ \frac{b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} d_j^1}{a_{ij}} \right\} \quad j = 1..n_1 \le n,$$ где d_j^1 - минимальные значения всех x_j, для которого определяется верхняя граница D_j.

Задача выбора вариантов. Перейдем теперь к частному случаю задач ЦП - задаче выбора вариантов.

В этом частном случае искомая переменная x_j в результате решения может принимать не любое целое значение, а только одно из двух: либо 0, либо 1. Чтобы такие переменные отличать от обычных и каждый раз не писать x_j [0;1], будем их вместо x_j обозначать δ_j. И это уже будет означать, что в результате решения задачи δ_j может быть равным или 0 или 1, т.е. всегда δ_j [0;1]. Такие переменные обычно называют булевыми (в честь предложившего их английского математика Джорджа Буля, 1815-1864).

С помощью булевых переменных можно решать самые различные по содержанию задачи, в которых надо что-то выбирать из имеющихся различных вариантов (например, еще в первобытно-общинном строе дикарь племени наверняка решал такую задачу, выбирая какого дикаря на какую работу поставить), в том числе: задачи о назначении, выбора вариантов, дискретного программирования.

Пример 6. В задаче выбора вариантов примем, что для получения результата в виде максимально возможной прибыли необходимо два вида ресурсов: материальные и трудовые (табл. 11). Возможны четыре варианта расхода ресурсов и получения прибыли. Требуется выбрать, какие варианты принять для реализации при условии, чтобы общее число принятых вариантов не превышало трех, т.е. $k \le 3$.

Таблица 11 – Условия задачи выбора вариантов

Показатели	Варианты				Наличие
	1	2	3	4	
Прибыль, д.е./ед.	65	80	90	210	-
Ресурсы:					
Материальные	200	180	240	250	800
Трудовые	10	15	22	28	50

Решение:

Для составления модели примем, что j-му варианту будет соответствовать δ_j (j=1..4). При этом $\delta_j = \begin{cases} 1, & \text{если j-й вариант принят}, \\ 0, & \text{если j-й вариант не принят}. \end{cases}$

Тогда математическая модель задачи запишется

$$\max L = 65\delta_1 + 80\delta_2 + 90\delta_3 + 210\delta_4;$$

$$200\delta_1 + 180\delta_2 + 240\delta_3 + 250\delta_4 \le 800;$$

$$10\delta_1 + 15\delta_2 + 22\delta_3 + 28\delta_4 \le 50;$$

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 \le 3.$$

Последняя строка системы обеспечивает выполнение условия, чтобы общее число принятых вариантов не превышало трех.

Из результатов решения этой задачи (первый столбец табл.12) видно, что наибольшая прибыль max L=300) будет получена в том случае, если будут приняты третий и четвертый варианты.

Таблица 12 – Результаты решения задачи

Оптимальное решение	Дополнительные условия		
	нет	$\delta_2 = \delta_4$	$\delta_3 + \delta_4 = 1$
Прибыль (max L)	300	290	235
δ_1^0	0	0	1

δ_2^0	0	1	1
δ_3^0	0	0	1
δ_4^0	1	1	0

С помощью булевых переменных можно накладывать дополнительные логические связи между вариантами. Например, требуется, чтобы четвертый вариант был принят только в том случае, если принят второй; а если же второй вариант не принят, то и четвертый не должен быть принят. Это условие можно записать так: $\delta_2=\delta_4$ или в форме записи ограничений $\delta_2-\delta_4=0$ (результат решения этой задачи во втором столбце табл.12).

Может быть сформулирован и другой вариант дополнительных условий, например требуется, чтобы был принят либо третий вариант, либо четвертый, т.е. $\delta_3+\delta_4=1$ (результат решения в третьем столбце).

Сравнивая значение прибыли в оптимальном решении (max L=300) с прибылью при выполнении дополнительных условий, можно сделать вывод, что они, как всегда приводят к снижению прибыли.

Переходя от примера с дополнительными условиями к общему случаю задачу выбора вариантов можно записать так:

$$\max L = \sum_{j=1}^{n} c_j \delta_j;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\delta_j \le b_i \quad (i = 1..m);$$

$$p \le \sum_{j=1}^{s\le n} \delta_j; \le k. \quad (*)$$

где последнее ограничение (∗) может учитывать самые разнообразные условия:

1. если накладывается требование “*должен*”, то в ограничении (∗) ставится *знак равенства*: $\delta_1+\delta_2+\delta_3+\delta_4=3$ (число принятых вариантов “должно быть” три);
2. если требование “*может*”, то - *знак неравенства*, в частности: если накладывается требование “*И*”, то условие (∗) : $\sum\limits_{j=1}^{s} \delta_j \ge 1$, например принятие *и* первого *и* третьего вариантов запишется $\delta_1+\delta_3\ge 1$.

3. если для вариантов накладывается требование "*ИЛИ*", то условие (*) запишется: $\sum_{j=1}^{s} \delta_j = 1$.

Значит, если обозначить $\delta_б$ - соответствует "быть", $\delta_{нб}$ - "не быть", то извечный вопрос "быть или не быть" запишется $\delta_б+\delta_{нб}=1$. В этом случае есть два допустимых решения: $\delta_б=1$, $\delta_{нб}=0$ - означает "быть"; $\delta_б=0$, $\delta_{нб}=1$ - означает "не быть".

Так как ЦФ не сформулирована, то дать оптимальный ответ на этот вопрос невозможно. Чтобы принять решение, необходимо знать, чего мы хотим. Но об этом мы уже неоднократно говорили.

7. ЗАДАЧИ ДИСКРЕТНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В этих задачах результатом решения должны быть целые, но не любые целые.

Пример 7. Мебельная фабрика выпускает диваны, кресла и стулья. Требуется определить, сколько можно изготовить спинок диванов, подлокотников кресел и ножек стульев при известном удельном расходе ресурсов (табл.13), чтобы доход был максимальным.

Причем выпуск спинок дивана может принимать любое значение, подлокотники изготавливаются парами, т.е. они должны быть кратны двум а ножки стульев - четырем.

Таблица 13 – Исходные данные

Показатели	Изделия			Наличие ресурса
	спинка дивана	подлокотники кресла	ножка стула	
Цена, д.е./ед.	20	6	8	-
Древесина	10	5	3	206
Трудозатраты	2	7	4	100
Спрос	10	8	12	-
	x_1	x_2	x_3	b_i

Решение:

Тогда с учетом этих требований математическая модель задачи запишется:

$$\max L = 20x_1 + 6x_2 + 8x_3;$$

$$10x_1 + 5x_2 + 4x_3 \le 206;$$

$$2x_1 + 7x_2 + 4x_3 \le 100;$$

$$0 \le x_1 \le 10;$$

$$0 \le x_2 \le 8;$$

$$0 \le x_3 \le 12;$$

$$x_2 = 2\delta_{21} + 4\delta_{22} + 6\delta_{23} + 8\delta_{24};$$

$$x_3 = 4\delta_{31} + 8\delta_{32} + 12\delta_{33};$$

$$\delta_{21} + \delta_{22} + \delta_{23} + \delta_{24} = 1;$$

$$\delta_{31} + \delta_{32} + \delta_{33} = 1,$$

где δ_{2k}, δ_{3k} - варианты количеств подлокотников и ножек ($k=1..k_i$).

Здесь введение дополнительно булевых переменных дает возможность обеспечить выпуск изделий в кратном заданном количестве. Так, для подлокотников x_2 может принимать следующие значения: если в результате решения будет получено $\delta_{21}=1$, а остальные $\delta_{22}=\delta_{23}=\delta_{24}=0$, то $x_2=2$; если $\delta_{22}=1$, а остальные $\delta_{21}=\delta_{23}=\delta_{24}=0$, то $x_2=4$ и т.д.

Для решения задачи с учетом дополнительных условий мы ввели еще семь переменных и четыре ограничения. Следовательно, введение дополнительных требований привело к увеличению размерности задачи. Заметим, что если бы нам требовалось определить выпуск спинок, подлокотников и ножек для одного изделия (комплекта), то можно было бы записать $x_2=2x_1$; $x_3=4x_1$ и не вводить дополнительные ограничения и булевы переменные. Но это была бы другая задача.

В результате решения задачи были получены следующие значения: max $L=320$; $x_1^0=10$; $x_2^0=4$; $x_3^0=12$; $\delta_{22}^0=\delta_{33}^0=1$; $\delta_{21}^0=\delta_{23}^0=\delta_{24}^0=\delta_{31}^0=\delta_{32}^0=0$.

При этом оказались не полностью использованы ресурсы: резерв первого равен 50, второго - 4 ед.

Такое недоиспользование характерно для задач ЦП, т.е. ресурс остается, но для использования на увеличение дискретного количества продукции его оказывается недостаточно.

В общем виде задачу распределения ресурсов с учетом требования дискретного значения переменных можно записать:

$$\max(\min)L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = 1..m);$$

$$x_j = \sum_{k=1}^{k_j} d_{kj}\delta_{kj} \quad (j = 1..n);$$

$$\sum_{k=1}^{k_j} \delta_{kj} = 1.$$

где $d_{1j}, d_{2j}, \dots, d_{kj}, \dots$ - дискретные значения, которые может принимать переменная x_j. Эта система отличается от обычной задачи распределения ресурсов:

$$\max(\min)L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = 1..m);$$

$$d_j \le x_j \le D_j \quad (j = 1..n).$$

появлением булевых переменных и увеличением числа ограничений. Значит, в данном случае, как и всегда, за удовлетворение дополнительных требований приходится платить увеличением размерности задачи и целочисленностью. А как решать - в следующем параграфе.

Мы убедились, что с помощью булевых переменных можно решать часто встречающиеся задачи оптимизации. Но как решать? Есть три метода решения задач с булевыми переменными.

I) Методом ветвей и границ, т.е. как обычные задачи ЦП. При этом на каждую переменную накладываются два требования:

$$0 \le \delta_j \le 1 \ (j=1..n);$$

$$\delta_j = 0,\ 1 \text{ - целые } (j=1..n).$$

Совершенно очевидно, что выполнение этих двух требований обеспечивает получение в решении значений δ_j [0; 1], т.е. равных либо 0, либо 1.

II) Метод сплошного перебора.

Пример 8. Например, требуется решить систему:

$\max L = 3\delta_1 - 2\delta_2 + 5\delta_3$;

$$\delta_1 + 2\delta_2 - \delta_3 \le 2; \quad (1)$$

$$\delta_1 + 4\delta_2 + \delta_3 \le 4; \quad (2)$$

$$\delta_1 + \delta_2 \le 3; \quad (3)$$

$$4\delta_1 + \delta_3 \le 6; \quad (4)$$

Решение: Так как δ_1, δ_2, δ_3 могут принимать значения 0 или 1 в любом сочетании, рассмотрим все возможные сочетания (табл.14) в следующей последовательности:

Таблица 14

№ варианта	δ_1	δ_2	δ_3	(1)	(2)	(3)	(4)	L
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	1	1	1	4	3
3	0	1	0	2	4	1	0	-2
4	0	0	1	-2	1	0	1	5
5	1	0	1	0	2	1	5	8
6	1	1	0	3	5	2	4	1
Требование				≤ 2	≤ 4	≤ 3	≤ 6	max

1. Заполнить все возможные сочетания допустимых значений δ_1, δ_2, δ_3 ;
2. Определить и записать значения левых частей ограничений (1)-(4) и ЦФ.
3. Вычеркнуть те варианты, в которых не удовлетворяется хотя бы одно ограничение как приводящие к недопустимым решениям.
4. Из оставшихся вариантов принимается тот, в котором ЦФ максимальна. В примере max L = 8 в шестом варианте (оптимальном), в котором $\delta_1^0=\delta_3^0=1$; $\delta_2^0=0$.

Из этого примера видно, что в данном случае всего вариантов будет $2^3=8$ и для каждого варианта надо вычислить четыре ограничения и ЦФ, т.е. выполнить N=8 (4+1) = 40 вычислительных операций. Значит в общем случае $N=2^n(m+1)$, где n - число переменных, m - число ограничений. Следовательно, при увеличении размерности задачи число вычислений резко возрастает (табл.15).

Таблица 15

n	m		
	4	10	15
3	40	88	120
5	160	352	512
10	5120	11264	16384

Для сокращения трудоемкости полного перебора применяют различные методы.

III) Метод фильтрующего ограничения. Здесь принимают следующую последовательность действий.

1. Принимают некоторые значения δ_1, δ_2, δ_3 , например: $\delta_1=1$; $\delta_2=\delta_3=0$.

2. Определяют значение ЦФ при таком наборе переменных

$L = 3\delta_1 - 2\delta_2 + 5\delta_3 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 3.$

3. Далее устанавливают новые значения переменных и ЦФ; причем, если полученное ЦФ меньше 3, то этот вариант не рассматривают. Для исключения возможного рассмотрения такого варианта вводят дополнительное ограничение $3\delta_1 - 2\delta_2 + 5\delta_3 \geq 3$, которое называют **фильтром (Ф)**.
4. Составляют таблицу (табл.16), в которой для каждого варианта проверяют выполнение всех ограничений, включая Ф.

Таблица 16

№ варианта	δ_1	δ_2	δ_3	Ф=F	(1)	(2)	(3)	(4)
1	0	0	0	-	-	-	-	-
2	1	0	0	3	1	1	1	4
3	0	1	0	-2	-	-	-	-
4	1	1	0	1	-	-	-	-
5	0	0	1	5	-1	1	0	1
6	1	0	1	8	0	2	1	5
7	0	1	1	3	1	5	-	-
8	1	1	1	6	2	6	-	-
Требование				≥ 3	≤ 2	≤ 4	≤ 3	≤ 6

Если вычисление прекращается и величины не определены, то в клетках таблицы ставится прочерк.

Введение фильтрующего ограничения Ф привело к сокращению числа вычисляемых величин (24 вместо 40, т.е. 60%).

Число вычислений можно уменьшить, если фильтр иметь не постоянный для всего цикла вычислений, а изменяющийся, т.е. если в ходе вычислений при каком-либо наборе переменных значение ЦФ окажется лучше, чем у фильтра, то это новое допустимое решение принимают для следующих вычислений в качестве нового фильтра. Такой фильтр называют адаптивным.

Например, из таблицы видно, что в пятом варианте Ф=5. Поэтому для дальнейших вычислений в качестве фильтрующего ограничения принимаем $3\delta_1 - 2\delta_2 + 5\delta_3 \geq 5$ ($Ф_1$). Однако для следующего варианта ЦФ будет еще больше и равна Ф=8 и в качестве фильтрующего ограничения принимается $3\delta_1 - 2\delta_2 + 5\delta_3 \geq 8$ ($Ф_2$). Для седьмого и восьмого вариантов ЦФ не удовлетворяет требованиям фильтра $Ф_2$ и значения ограничений не вычисляем. Значит трехкратный фильтр ($Ф$, $Ф_1$, $Ф_2$) позволил сократить вычисления еще на 4, т.е. надо выполнить 20 вычислений вместо 40 (50%). Более значительное сокращение трудоемкости достигается методом Беллмана с фильтром, где наибольший Ф получают сразу.

Контрольные вопросы и задания

1. Что подразумевается под следующими понятиями: целевая функция, целочисленные переменные, допустимое решение?
2. Дайте характеристику этапов экономико-математического моделирования.
3. Назовите основные классификационные признаки экономико-математических моделей.
4. Сформулируйте в общем виде математическую постановку экстремальной задачи.
5. На какие группы классифицируются ЭММ в зависимости от свойств ЦФ и ограничений?
6. По условию примера 4 определить целесообразность включения в план производства изделия Д, нормы затрат ресурсов на ед. которого 2, 4, 3 ед., а цена изделия равна 18 ед. Как изменятся оптимальные планы ПЗ и ДЗ, если фонды ресурсов каждого вида будут 140, 250, 240 ед.?
7. Поставить задачу ЛП: Пусть для производства n видов изделий предприятие m типов взаимозаменяемого оборудования. Каждое из видов изделий необходимо изготовить в количестве b_j (j=1..n), причем каждый из типов оборудования может быть занят изготовлением этих изделий не более a_i часов (i=1..m). Время изготовления одного изделия j-го вида на i-м типе оборудования равно a_{ij} часам, а затраты на производство одного изделия на данном типе оборудования равны c_{ij} (i=1..m; j=1..n). Определить, сколько изделий каждого вида

на каждом из типов оборудования следует произвести, чтобы себестоимость одного изделия была минимальной.

8. Поставить задачу: Пусть предприятие для производства n различных наименований изделий использует m видов ресурсов. На производство единицы изделия j-го наименования требуется a_{ij} единиц ресурсов i-го вида (i=1..m), а всего их может быть использовано b_i (i=1..m) единиц. Величина производственных фондов, используемых при производстве изделия j-го наименования, равна c_j, а прибыль от реализации d_j (j=1..n) руб. Предполагая, что предприятие может выпускать изделия разных наименований в любых соотношениях, найти план производства, обеспечивающий максимальную рентабельность.

9. Подставить произвольно данные в задания 7, 8 и решить задачи с помощью QSB. Проанализировать и устранить возможную несовместность ограничений. По результатам оптимального решения выявить дефицитные и излишние ресурсы. Не меняя структуру оптимального плана, улучшить значение ЦФ за счет варьирования постоянными величинами прямой задачи в установленных пределах чувствительности.

10. Поставить и решить с помощью QSB задачу ЦП: Пусть для производства двух видов изделий на двух предприятиях одного объединения может быть использовано 480 ед. сырья. Нормы затрат сырья на одно изделие соответственно равны 4 и 3 ед., а прибыль от реализации одного изделия соответственно равна 5 и 6 млн. руб. На каждом из предприятий изделия проходят последовательную обработку, причем используются два типа технологического оборудования. Известны затраты времени на изготовление на каждом из типов оборудования каждого предприятия и их общий фонд времени работы:

<table>
<tr><th rowspan="3">Тип обору-дования</th><th colspan="2">1-е предприятие</th><th colspan="2">2-е предприятие</th><th colspan="2" rowspan="2">Общий фонд рабочего времени предприятия</th></tr>
<tr><th colspan="4">Затраты времени на одно изделие</th></tr>
<tr><th>Изделие А</th><th>Изделие В</th><th>Изделие А</th><th>Изде-лие В</th><th>1-е пред-приятие</th><th>2-е пред-приятие</th></tr>
<tr><td>I</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>360</td><td>420</td></tr>
<tr><td>II</td><td>1</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>420</td><td>340</td></tr>
</table>

С учетом имеющихся ресурсов и возможностей использования предприятиями технологического оборудования определить, сколько изделий каждого вида следует изготовить на каждом из предприятий, чтобы прибыль от их реализации была максимальной.

РАЗДЕЛ II. СПЕЦИФИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ЛП И ГРАФЫ

1. ЗАДАЧИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Во многих задачах экономики требуется изучить поведение оптимального решения задачи ЛП в зависимости от изменений коэффициентов ЦФ. Задачи, в которых исходные данные зависят от некоторого параметра (например, цена продукции от спроса), называют задачами параметрического программирования.

Задача, в которой коэффициенты ЦФ линейно зависят от параметра t, заключается в нахождении для каждого значения параметра t из промежутка его изменения $[\alpha, \beta]$ максимального значения функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} (c'_j + c''_j t) x_j \qquad (1)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1..m) \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1..n) \qquad (3)$$

где c'_j, c''_j, a_{ij}, b_i - заданные постоянные числа.

Может быть поставлена и обобщенная параметрическая задача, в которой от параметра t линейно зависят коэффициенты при неизвестных в ЦФ (цены изделий от спроса на них), в системе уравнений (нормы расхода ресурсов от применяемых технологий), свободные члены системы уравнений (наличие ресурсов от предложений поставщиков):

$$\max F = \sum_{j=1}^{n} (c'_j + c''_j t) x_j \qquad (4)$$

$$\sum_{j=1}^{n} (a'_{ij} + a''_{ij} t) x_j = b'_i + b''_i t \quad (i = 1..m) \qquad (5)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1..n) \qquad (6)$$

$$\alpha \leq t \leq \beta \qquad (7)$$

где α, β - промежуток изменения значений параметра t $(-\infty, +\infty)$.

Решение задач (1)-(3), (4)-(7) можно найти методами ЛП, например, геометрически при j=2.

Предположим, что в задаче (1)-(3) множество неотрицательных решений системы линейных уравнений (2) (многогранник решений) не пустой и включает более чем одну точку. Тогда исходная задача состоит в определении при каждом параметре $t \in [\alpha, \beta]$ такой точки многогранника решений, в который функция (1) принимает max. Чтобы найти эту точку, будем считать $t=t_0$ и, используя геометрическую интерпретацию, находим решение полученной задачи ЛП (1)-(3), т.е. определим вершину многогранника решений, в которой функция (1) имеет max, либо устанавливаем, что при данном значении t_0 задача неразрешима.

После нахождения точки, в которой при $t=t_0$ функция (1) принимает max, ищут множество значений t, для которых координаты этой точки определяют оптимальный план задачи (1)-(3). Найденные параметры t исключают из рассмотрения и берут некоторое новое значение t из промежутка $[\alpha, \beta]$.

Для выбранного значения параметра t из промежутка $[\alpha, \beta]$ либо находят оптимальный план, либо устанавливают неразрешимость задачи.

Пример 1. Пусть предприятие изготавливает два вида продукции A, B, для которых использует три вида ресурсов. Известны нормы расхода и запасы каждого вида (табл.1).

Таблица 1

Ресурсы	Удельный расход ресурсов на изделие		Наличие ресурсов
	A	B	
1	4	1	16
2	2	2	22
3	6	3	36
Цена изделия	2+t	13-t	-

Из анализа спроса установлено, что цена единицы продукции для изделия A может изменяться от 2 до 12 $, а для изделия B - от 13 до 3 $, причем эти изменения определяются соотношениями $c_1=2+t$, $c_2=13-t$, где $0 \le t \le 10$. Требуется для каждого из возможных значений цены каждого вида изделий, найти такой план их производства, при котором обеспечивается максимальная выручка.

Решение: Математически задача формулируется:

$$\begin{cases} \max[(2+t)x_1+(13-t)x_2]; & (8) \\ 4x_1+x_2 \le 16; & \\ 2x_1+2x_2 \le 22; & (9) \\ 6x_1+3x_2 \le 36 & \\ x_1, x_2 \ge 0; \quad 0 \le t \le 10. & (10) \end{cases}$$

Для решения задачи (8)-(10) строим многоугольник решений, определенный системой линейных неравенств (9) и условием неотрицательности переменных (рис.1).

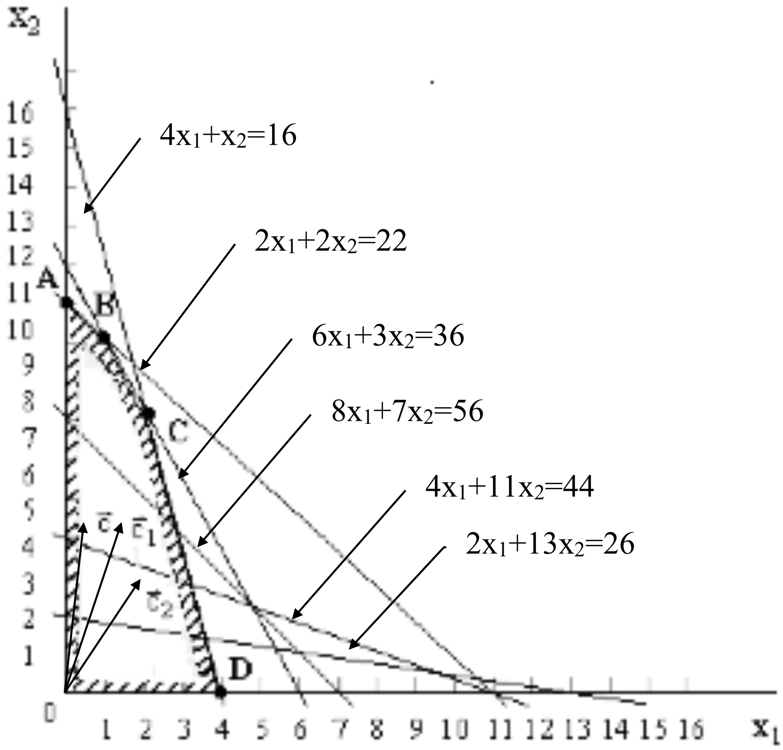


Рис.1.

После этого, полагая t=0, строим ЦФ $2x_1+13x_2=26$ (число 26 - произвольно) и вектор $\vec{c}=(2; 13)$. Передвигая эту прямую в направлении вектора $\vec{c}$, можно установить последнюю ее точку с многоугольником решений OABCD, т.е. точку A(0; 11).

Следовательно, задача, полученная из задачи (8)-(10) при t=0, имеет оптимальный план x_0^*=(0; 11). Это означает, что если цена изделия А равна 2+0=2 $, а цена изделия В 13-0=13 $, то в оптимальном плане производство изделий А не предусматривается, а изделий В требуется изготовить 11, и максимальная выручка составит max F=143 $.

Положим теперь t=2 и построим прямую ЦФ $(2+2)x_1+(13-2)x_2=$ $4x_1+11x_2=44$ (число 44 - произвольно и вектор $\vec{c}_1(4;\ 11)$. Передвигая эту прямую в направлении вектора $\vec{c}_1$, устанавливаем последнюю точку многоугольника решений, ту же точку А(0; 11).

Следовательно, при t=2 задача, полученная из задачи (8)-(10) имеет тот же оптимальный план x_0^*=(0; 11), означающий, что при цене изделия А 4, а изделия В 11$, требуется изготовить только 11 ед. изделия В, которые обеспечат максимум выручки max F=11∗11=121$.

Как видно, из рис. 10.1, данный план производства будет оставаться оптимальным для всякого значения t, пока прямая ЦФ $(2+t)x_1+(13-t)x_2=L$ не станет параллельной прямой $2x_1+2x_2=22$. Это произойдет тогда, когда $\frac{2+t}{2}=\frac{13-t}{2}$, т.е. при t=5,5 координаты любой точки отрезка АВ дают оптимальный план задачи (8)-(10).

Таким образом, для всякого $0 \le t \le 5{,}5$ задача (8)-(10) имеет оптимальный план x_0^*(0; 11), при котором значение ЦФ

$$\max F= (2+t)x_1+(13-t)x_2=(2+t)*0+(13-t)*11=143-11t.$$

При значениях параметра t, больших 5.5, например, t=6: прямая ЦФ: $8x_1+7x_2=56$ (56 - произвольно), которой соответствует вектор $\vec{c}_2(8;7)$; в направлении движения по этому вектору последняя точка В(1;10), т.е. при цене А 2+6=8, при цена В 13-6=7$ $x_1^0=1$; $x_2^0=10$; max F=78$.

Как видно из рис. 10.1, план x_1^*=(1;10) будет оптимальным задачи (8)-(10) для всякого t > 5.5 пока прямая ЦФ не станет параллельной прямой $6x_1+3x_2=36$.

Это произойдет, когда $\frac{2+t}{6}=\frac{13-t}{3}$, т.е. при t=8, при котором координаты любой точки отрезка BC дают оптимальный план задачи (8)-(10).

Таким образом, для всякого $5.5 \le t \le 8$ задача (8)-(10) имеет оптимальный план x_1^*=(1; 10), при котором значение ЦФ max F=(2+t)*1+(13-t)*10=132-9t.

Используя рис.1 и аналогично рассуждая, получим для всякого $8 \le t \le 10$ оптимальным планом задачи (8)-(10) будет x_2^*=(2; 8), для изделия А это – 10 и 12 $, а изделия В - 3 и 5 $, то x_1^0=2 ед.; x_2^0=8 ед., которые обеспечат максимальную выручку max F=108-6t.

Окончательно:

$$t=\begin{cases} [0;5{,}5]=\begin{cases} x_0^*=(0;11) \\ \max F=143-11t. \end{cases} \\ \\ [5{,}5;8]=\begin{cases} x_1^*=(1;10) \\ \max F=132-9t. \end{cases} \\ \\ [8;10]=\begin{cases} x_2^*=(2;8) \\ \max F=108-6t. \end{cases} \end{cases}$$

2.ЗАДАЧИ ДРОБНО-ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Общая задача дробно-линейного программирования формулируется

$$\begin{cases} \max L = \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sum\limits_{j=1}^{n} d_j x_j} = \dfrac{L_1}{L_2}; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = 1..m); \\ x_j \ge 0 \quad (j = 1..n), \end{cases}$$

где c_j, d_j, b_i, a_{ij} - некоторые постоянные числа; $\sum\limits_{j=1}^{n} d_j x_j > 0$.

Для n=2:

$$\begin{cases} \max L = \dfrac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{d_1 x_1 + d_2 x_2}; & (1) \\ a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \le b_i \quad (j = 1..n); & (2) \\ x_1, x_2 \ge 0, & (3) \end{cases}$$

где $d_1x_1 + d_2x_2 > 0$.

Задача (1)-(3) решается в следующей последовательности:

1. В системе ограничений (2) заменяют знаки неравенств на знаки точных равенств и строят определяемые этими равенствами прямые.
2. Находят полуплоскости, определяемые каждым из неравенств системы ограничений задачи.
3. Находят область (многоугольник) допустимых решений задачи.
4. Строят прямую $L = \dfrac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{d_1 x_1 + d_2 x_2}$, уравнение которой получается, если положить значение ЦФ (1) равным некоторому постоянному числу.
5. Определяют точку максимума или устанавливают неразрешимость задачи.
6. Находят значение ЦФ в точке максимума.

Пример 2. Пусть для производства двух видов изделий A и B используется три типа технологического оборудования. Известны затраты времени и других ресурсов на производство ед. изделия каждого вида (табл.2).

Таблица 2

Тип оборудования	Нормы времени		Ограничения по фонду времени оборудования	
	A	B	верхний	нижний
I	2	8	26	-
II	1	1	-	4
III	12	3	39	-
Затраты на производство	2	3	-	-

Требуется определить, сколько изделий каждого вида необходимо изготовить, чтобы себестоимость одного изделия была минимальной.

Решение:

$$\begin{cases} \min L = \dfrac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2}; & (4) \\ 2x_1 + 8x_2 \le 26; & (5) \\ x_1 + x_2 \ge 4; & (6) \\ 12x_1 + 3x_2 \le 39; & (7) \\ x_1, x_2 \ge 0. & \end{cases}$$

Решение задачи определяется из ОДР (рис.2).

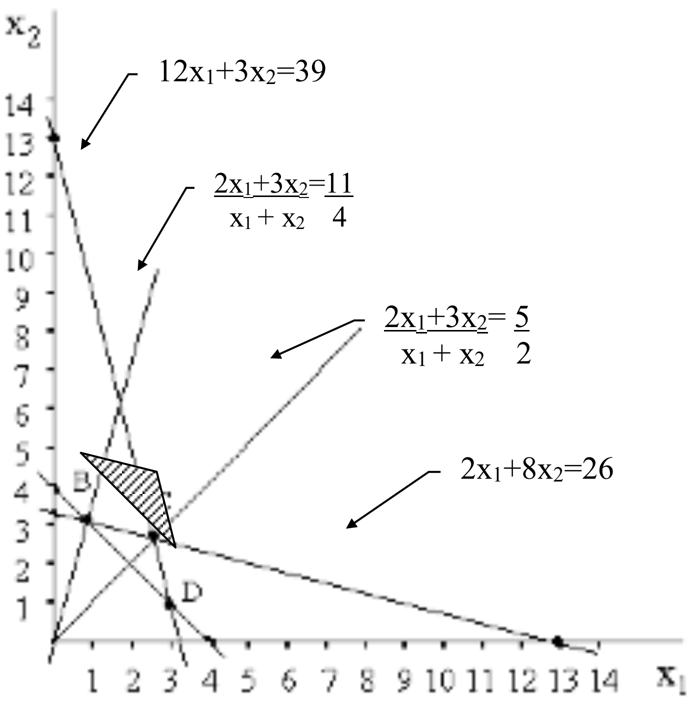


Рис. 2. Область решений задачи

Из рис. 2 видно, что ОДР представляется треугольником ВСД. Значит ЦФ принимает значение в одной из точек: В, С или Д. Чтобы определить, в какой из этих точек, положим значение функции L, равным некоторому числу, например, 11/4:

$$\frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} = \frac{11}{4} \quad \text{или} \quad -3x_1 + x_2 = 0. \tag{8}$$

Очевидно, уравнение (8) определяет прямую, проходящую через начало координат. Координаты точек этой прямой, принадлежащие и многоугольнику решений, являются планами задачи, при которых значение ЦФ равно 11/4. В данном случае к указанным точкам относится только одна точка В(1; 3).

Теперь положим, что

$$\frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} = \frac{5}{2} \quad \text{или} \quad -x_1 + x_2 = 0. \tag{9}$$

Уравнение (9), как и (8), определяет прямую, проходящую через начало координат. Ее можно рассматривать как прямую, полученную в результате вращения прямой (8) по часовой стрелке вокруг начала координат. Следовательно, если положить значение ЦФ равным некоторому числу L_0

$$\frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} = L_0 \tag{10}$$

а прямую (10), проходящую через начало координат, вращать в направлении часовой стрелки вокруг начала координат, то получим прямые

$$\frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} = L, \text{ где } L < L_0.$$

Последней общей точкой вращаемой прямой с ОДР, очевидно, будет точка Д(3; 1), в которой достигается минимум функции (4).

Таким образом, оптимальный план заключается в производстве 3 изделий А и одного изделия В, обеспечивающем минимальную себестоимость одного изделия, равного

$$\min L = \frac{2\cdot 3 + 3\cdot 1}{3+1} = \frac{9}{4}.$$

Угловую точку ОДР, в которой ЦФ может принимать минимальное (или максимальное) значение, можно найти, вычисляя и сравнивая значение ЦФ в этих подозрительных на экстремум точках: L(B)=11/4, L(D)=9/4. Так как L(B) > L(D), то можно утверждать, что в точке D - ЦФ принимает минимальное значение (а в точке B - максимальное).

Необходимо помнить, что решение дробно-линейных задач определяется видом ОДР (3.).

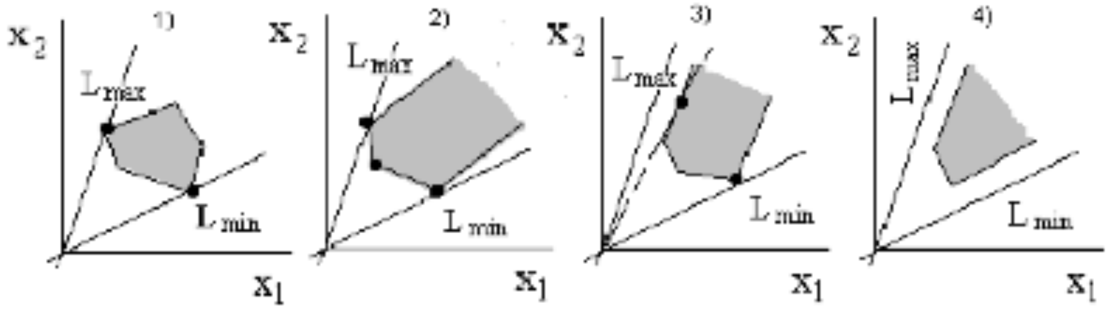


Рис. 3.

1) ОДР ограничена, max или min ЦФ достигаются в ее угловых точках.
2) ОДР не ограничена, но существуют угловые точки, в которых ЦФ принимает собственно максимальное и минимальное значение.
3) ОДР не ограничена, и один из экстремумов достигается (L_{min}) в одной из ее вершин, а ЦФ имеет так называемый асимптотический максимум.
4) ОДР не ограничена; max и min являются асимптотическими.

Задача дробно-линейного программирования при n > 2 может быть решена сведением ее к задаче ЛП. Для этого следует обозначить через

$$y_0 = \left(\sum_{j=1}^{n} d_j x_j\right)^{-1} \qquad (*)$$

и ввести новые переменные

$$y_j = y_0 x_j \quad (j=1..n). \qquad (**)$$

Тогда исходная задача (1)-(3) сведется к следующей:

$$\begin{cases} \max L^* = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j y_j; & (11) \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0 \quad (i = 1..m); & (12) \\ \sum\limits_{j=1}^{n} d_j y_j = 1; & (13) \\ y_j \ge 0 \quad (j = 1..n),\ y_0 \ge 0. & (14) \end{cases}$$

Задача (11)-(14) - это задача ЛП, и следовательно, ее решение можно найти известными методами, а значит найти и оптимальный план (по отношениям ($*$), ($**$)) исходной задачи.

Пример 3.

$$\begin{cases} \max L = \dfrac{2x_1 + x_2}{x_1 + x_2}; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 11; \\ x_1 - x_2 + x_4 = 8; \\ -x_1 + 3x_2 + x_5 = 9; \\ x_1, \dots, x_5 \ge 0. \end{cases}$$

Здесь x_3, x_4, x_5 - фиктивные переменные, преобразующие неравенства в равенства.

Решение:

Сводим эту задачу к задаче ЛП. Для этого обозначим $y_0=(x_1+x_2)^{-1}$ и вводим новые переменные $y_j=y_0x_j$ (j=1..5). Получим задачу ЛП, которая может быть решена на ППК.

$$\begin{cases} \max L^* = 2y_1 + y_2; \\ y_1 + 2y_2 - y_3 - 11y_0 = 0; \\ y_1 - y_2 + y_4 - 8y_0 = 0; \\ -y_1 + 3y_2 + y_5 - 9y_0 = 0; \\ y_1 + y_2 = 1; \\ y_1, \dots, y_5 \ge 0, y_0 \ge 0,. \end{cases}$$

Ее оптимальный план:

$y_1^0=0.9$; $y_2^0=0.1$; $y_3^0=y_4^0=0$; $y_5^0=1.5$; $y_0^0=0.1$.

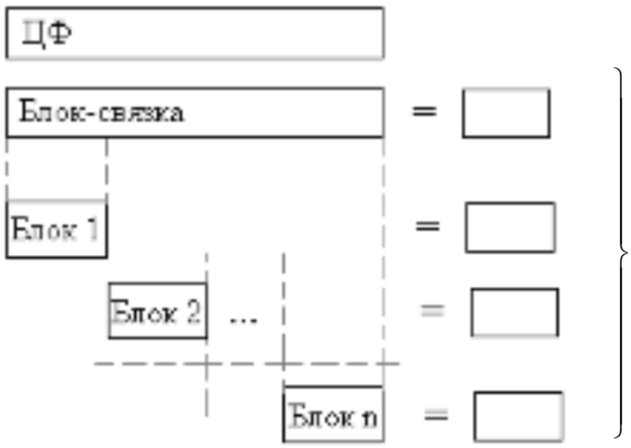
Так как $y_j=y_0x_j$, то оптимальный план исходной задачи:

$x_j^0= y_j^0/ y_0^0$, т.е. $x^0=(9; 1; 0; 0; 15)$,

$\max L=\dfrac{2 \cdot 9 + 1}{9 + 1} = 1{,}9$

3.ЗАДАЧИ БЛОЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В решении конкретных экономических задач часто используют постановки, системы ограничений которых содержат все переменные (ограничения, образующие блок-связку), а другая часть ограничений содержит часть переменных (ограничения, образующие блоки). Структура таких задач может содержать значительное число блоков:



$$\begin{cases} \max L = c_1x_1+...+c_jx_j+...+c_nx_n = \sum\limits_{j=1}^{n} c_jx_j; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \qquad (i = 1..m_0); \\ \sum\limits_{j=1}^{n_1} a_{ij}x_j \le b_i \qquad (i = m_0+1, m_1); \\ \sum\limits_{j=n_1+1}^{n_2} a_{ij}x_j \le b_i \qquad (i = m_1+1, m_2); \\ \sum\limits_{j=n_{p-1}+1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \qquad (i = m_{p-1}+1, m_p); \\ d_j \le x_j \le D_j \qquad (j = 1..n) \end{cases}$$

Такой задаче специальной блочной структуры соответствует особая структура исходных данных (табл.3).

Таблица 3

Ограни-чение	Переменные					Свободный член
	n_1	n_2	n_3	...	n_p	
m_0	A_{01}	A_{02}	A_{03}	...	A_{0p}	b_0
m_1	A_1			...		b_1
m_2		A_2		...		b_2
m_3			A_3	...		b_3
...	...	...	...	...	...	...
m_p				...	A_p	b_p

Применительно к матрице блочной структуры математическую постановку задачи можно переписать иначе, вводя двухиндексное обозначение переменной x_{pj}, указывающей на принадлежность переменной x_j к p-му локальному блоку:

$$\begin{cases} \max(\min)L = \sum\limits_{p=1}^{P} \ \sum\limits_{j=1}^{n} c_{pj} x_{pj}; \\ \sum\limits_{p=1}^{P} \ \sum\limits_{j=1}^{n_p} a_{ij} x_{pj} \le b_i \qquad (i = 1..m_0); \text{ (для блока - связки)} \\ \sum\limits_{j=1}^{n_p} a_{ij} x_{pj} \le b_i \qquad (i = 1..m_p, p = 1..P); \\ d_{pj} \le x_{pj} \le D_{pj} \qquad (j = 1..n_p; p = 1..P), \end{cases}$$

где P - общее число локальных блоков; n_p - число переменных, входящих в p-й локальный блок; m_p - число ограничений в p-м локальном блоке.

Задачи такого класса ставятся применительно к производственным комплексам, холдингам, финансово-промышленным группам, корпорациям и т.п., каждые из которых состоят из нескольких других предприятий со своими локальными характеристиками (ресурсами, показателями) и в то же время объединенных совокупностью ограничений (общими для всей системы) и единой ЦФ.

Особенность таких задач - большая размерность, затрудняющая формирование и отладку постановки и исходных данных.

Современные программные средства в большинстве используют специальные методы решения с разложением (декомпозицией) задачи на P подзадач, например, метод декомпозиции Данцига-Вульфа. По этому методу каждый блок матрицы формируется и отлаживается автономно как отдельная подзадача с последующим объединением блоков общими ограничениями на этапе окончательного составления задачи. Такие задачи экономически интерпретируются как задачи многоуровневой иерархической структуры.

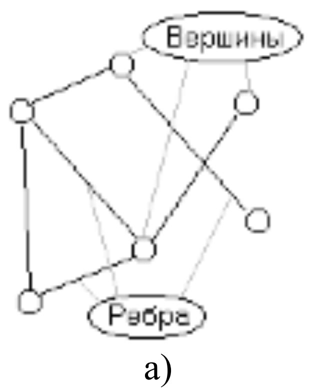
4. Графы и их оптимизация

Наука, занимающаяся графическими представлениями - геометрия из-за своей наглядности получила широкое распространение уже в древности. Так, задолго до жившего в VI в. до н.э. Пифагора была известна теорема, которая позже стала носить его имя. Наглядность геометрии широко используют в наше время, в том числе при анализе больших технических и организационных систем, в которых используют теорию графов.

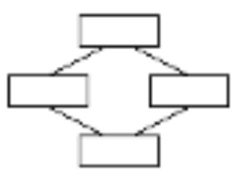
Граф - универсальное средство наглядного представления достаточно разнообразных задач - совокупность вершин и ребер (рис.4а).

Разнообразные сочетания различных ребер и вершин представляют многообразие возможных графов и их применения. Граф, в котором вершины-прямоугольники и направления ребер не заданы, описывает блок-схему (или структуру) технической системы (рис.4б). Рис.4в - граф-дерево (например, описание метода ветвей и границ). - Многоуровневая иерархическая система, в которой все вершины распределены по нескольким уровням. Рис.4д - граф с дугами, изображающими связь между вершинами, - сеть.

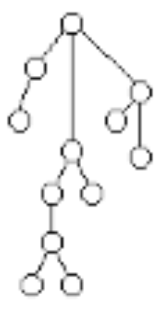
Сетями представляют различные задачи, в которых исследуют перемещение или выполнение работ во времени. Сеть характеризуется структурой и параметрами дуг. Структура (топология) сети показывает, какие вершины связаны между собой, и направление связывающих их дуг.



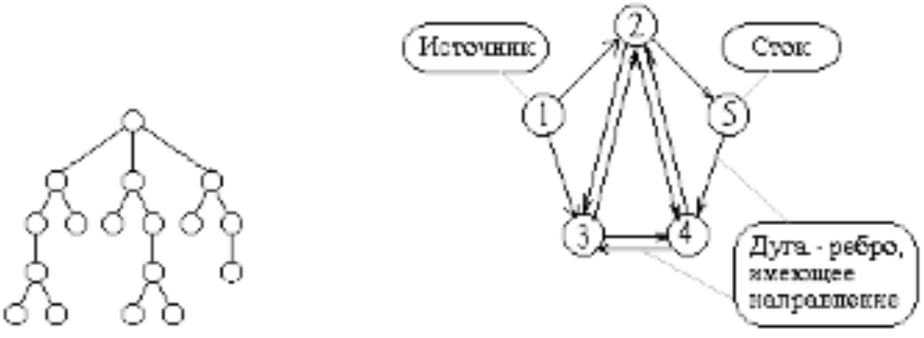
а)



б)



в)



г) д)

Рис.4 Виды графов

Каждую вершину сети нумеруют порядковым номером. Начальную (“1”) вершину называют “**источником**”, конечную - **“стоком**” в описании движения потоков.

Дугу (рис.5) обозначают двойной индексацией 1-2; 3-4 и т.д. В общем случае дугу обозначают “i-j”, где i - номер вершины, из которой исходит дуга; j - номер вершины, в которую входит дуга. Каждая дуга имеет свою **характеристику**: t_{ij}- продолжительность движения по дуге i-j; c_{ij}- стоимость перемещения; d_{ij}- пропускная способность дуги и т.д.

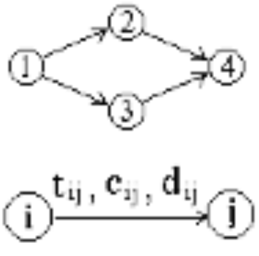


Рис. 5

Зная топологию сети и ее параметры можно решать самые разнообразные часто встречающиеся задачи оптимизации.

Задача коммивояжера.

Пример 4. Пусть имеются, например, пять пунктов, соединенных между собой дорогами так, что из любого пункта можно проехать в любой другой пункт (рис.6). Известно время перевозки из пункта i в пункт j (табл.4).

Таблица 4

Из пункта	В пункт j				
i	1	2	3	4	5
1	0	10	25	25	10
2	1	0	10	15	2
3	8	9	0	20	10
4	14	10	24	0	15
5	10	8	25	27	0

Требуется найти такой маршрут, начинающийся в данном пункте, проходящий через все пункты и заканчивающийся в пункте выезда, чтобы его продолжительность была наименьшей.

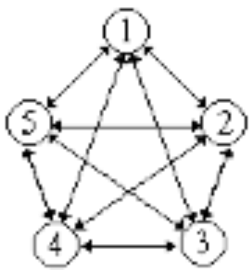


Рис. 6

Решение:

Для решения этой задачи необходимо составить математическую модель. Введем обозначения: i и j - номера пунктов выезда и въезда; t_{ij}- время переезда из пункта i в пункт j. Из табл.4 видно, что t_{ij} в общем случае может быть не равно времени переезда в обратном направлении $t_{ij} \neq t_{ji}$ (например, когда один пункт на вершине горы, а другой - у ее подножия). Введем булевы переменные:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если из пункта i торговец переедет в пункт j;} \\ 0, \text{ если не поедет.} \end{cases}$$

Составим модель. Из п.1 можно выехать в любой из пп. 2 или 5, или 3, или 4, или остаться в п.1. Но при этом можно выехать только в одном единственном направлении. Это условие можно записать так:

$\delta_{11}+\delta_{12}+\delta_{13}+\delta_{14}+\delta_{15}=1$ или $\sum_{j=1}^{5}\delta_{1j}=1$ или для произвольного (любого) i-го пункта

$$\sum_{j=1}^{5}\delta_{ij}=1\ (i=1..5).$$

Эти зависимости обеспечивают выполнение условия, что из каждого пункта выезд производится только один раз и только в одном направлении.

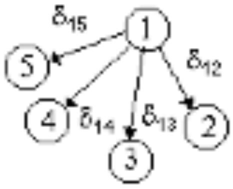


Рис.7

Условие въезда в п.1 аналогично условию выезда из п.1 (рис.7). Требование минимальной продолжительности маршрута запишется в виде ЦФ:

$\min L= t_{11}\delta_{11} + t_{12}\delta_{12} + t_{13}\delta_{13} + t_{14}\delta_{14} + t_{15}\delta_{15} + t_{21}\delta_{21} + t_{22}\delta_{22} + ... + t_{55}\delta_{55}$, где t_{ij} берутся из исходной таблицы, а δ_{ij} - искомые переменные.

Тогда всю задачу можно сформулировать:

$$(*)\quad \begin{cases} \min L=\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}t_{ij}\delta_{ij}; \\ \sum_{j=1}^{5}\delta_{ij}=1 \quad (i=1..5); \\ \sum_{i=1}^{5}\delta_{ij}=1 \quad (j=1..5); \\ \delta_{ij}=[0;1] \quad (i,j=1..5). \end{cases}$$

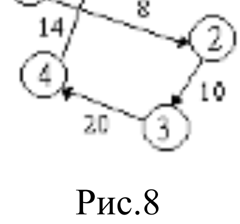


Рис.8

В результате решения системы (*) получим (рис.8) следующие значения $\delta_{15}{}^{0}=\delta_{52}{}^{0}=\delta_{23}{}^{0}=\delta_{34}{}^{0}=\delta_{41}{}^{0}=1$, остальные $\delta_{ij}{}^{0}=0$; $\min L = 10+8+10+20+14=62$.

Переходя от частной к общей постановке задачу коммивояжера можно сформулировать:

$$(*)\qquad \begin{cases} \min L = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} t_{ij}\delta_{ij}; \\ \sum\limits_{j=1}^{5}\delta_{ij} = 1 \quad (i = 1..n); \\ \sum\limits_{i=1}^{5}\delta_{ij} = 1 \quad (j = 1..n); \\ \delta_{ij} = [0;1] \quad (i, j = 1..n). \end{cases}$$

Сетевой график (сеть) состоит из дуг и узлов (вершин). Дуге соответствует выполняемая работа (обозначается стрелкой ⟶); вершине - событие, т.е. состояние перед работой (обозначается кружком ◯).

Исходные данные, необходимые для составления сети, представляют в форме таблицы, которая включает последовательность работ и продолжительность выполнения каждой работы (табл.5).

Таблица 5

Работа	Содержание	Следует после работ	Продолжительность	Обозначение
a_1	Закупка и доставка оборудования	-	1	1-2
a_2	Разработка технологии	-	2	1-3
a_3	Монтаж и наладка оборудования	a_1	4	2-3
a_4	Обучение рабочих-операторов	a_1	3	2-4
a_5	Пуск линии в эксплуатацию	a_2 , a_4	6	3-4

На рис.9 сети числа над дугами показывают продолжительность каждой работы. События будем обозначать порядковыми номерами.

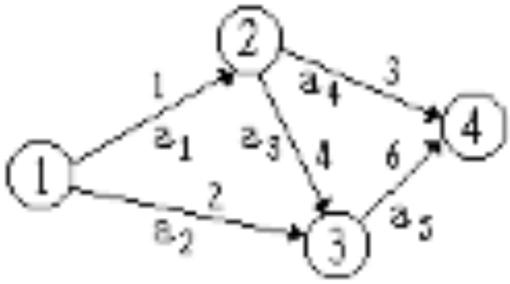


Рис.9

Таблица 6

Событие	Время наступления
Начало работ	T_1
Оборудование получено	T_2
Технология разработана, оборудование отлажено	T_3
Персонал обучен, производство запущено	T_4

Два события отметим особо: **начальное** - состояние, с которого начинается весь комплекс работ; **конечное** - состояние, которым завершается комплекс работ.

По исходным данным табл.5 строится сетевой график (рис.9).

Работу будем обозначать двумя индексами i-j, где i - номер события, после которого начинается работа, j - номер события, которым заканчивается работа (рис.9 и последнюю графу табл.6).

Последовательность работ, в которой конец предыдущей работы совпадает по времени с началом последующей, называется путем (табл.7).

Таблица 7

Путь	Последовательность работ	Продолжительность
1	1-2-4	1+3=4
2	1-2-3-4	1+4+6=11

Путь наибольшей продолжительности называют критическим (на примере - второй, выделенный цветом). На критическом пути лежат работы 1-2; 2-3; 3-4.

Увеличение продолжительности работ критического пути приводит к более позднему наступлению конечного события.

Работы, не лежащие на критическом пути, могут быть позже начаты или позже окончены, или иметь большую продолжительность без изменения срока окончания всех работ.

Величину, на которую можно увеличить продолжительность выполнения такой работы без увеличения времени наступления конечного события, называют резервом.

Вывод. Если руководитель следит за выполнением всех работ в срок, то он должен четко знать и особо контролировать работы критического пути.

В нашем примере критический путь был найден простым перебором всех возможных путей. Исследование модели было словесным, без математической формулировки. Это необходимо для уяснения смысла, но недостаточно для сложных сетей.

Перейдем к формализации. В нашем примере время наступления каждого события может быть найдено по зависимостям

$$T_1 = 0;$$

$$T_2 = T_1 + t_{12} = 0 + 1 = 1.$$

Так как третье событие может наступить после выполнения работ 2-3 и 1-3, запишем:

$$\left.\begin{array}{l} T_3 \geq T_1 + t_{13} = 0 + 2 = 2, \ \text{т.е.} T_3 \geq 2 \\ T_3 \geq T_2 + t_{23} = 1 + 4 = 5, \ \text{т.е.} T_3 \geq 5 \end{array}\right\} \quad \text{значит } T_3 = 5.$$

Аналогично найдем время наступления последнего события:

$$\left.\begin{array}{l} T_4 \geq T_2 + t_{24} = 1 + 3 = 4, \quad \text{т.е.} T_4 \geq 4 \\ T_4 \geq T_3 + t_{34} = 5 + 6 = 11, \ \text{т.е.} T_4 \geq 11 \end{array}\right\} \text{значит } T_4 = 11.$$

Окончательно время наступления событий будут равны T_1=0; T_2=1; T_3=5;

T_4=11 (рис.10).

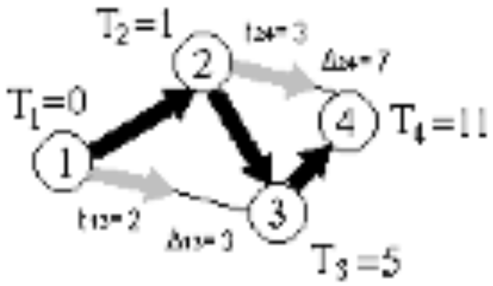


Рис. 10

Из рис.10 видно, что резерв работы 1-3, который будем обозначать Δ_{13}=5-2=3. Значит работа 1-3 может быть начата не в начальный момент времени, а спустя 3 ед. времени, или продолжаться на 3 ед. больше, чем первоначально предполагалось, т.е. может длиться 2+3=5 ед. без увеличения момента наступления конечного события “4”.

Аналогично $\Delta_{24} = T_4 - (T_2 + t_{24}) = 11-(1+3) = 7$, т.е. продолжительность работы 2-4 может быть увеличена на 7 ед. Очевидно, что для работ критического пути резерв времени равен 0, т.е. $\Delta_{12} = \Delta_{23} = \Delta_{34} = 0$.

Для третьего события можно записать

$T_3 = T_1 + t_{13} + \Delta_{13}$. Отсюда $(T_3 - T_1) - \Delta_{13} = t_{13}$.

Выражение $(T_3 - T_1)$ записано в скобках, чтобы было наглядно видно, что это интервал времени между двумя последовательными событиями. И этот интервал за вычетом резерва Δ_{13} равен продолжительности работы 1-3. В этой зависимости нам задана продолжительность работы t_{13} =2 (правая часть уравнения), остальные величины - искомые переменные. Если их обозначить:

$T_3 = x_3$; $\Delta_{13} = x_{13}$; $T_1 = x_1$; $t_{13} = b_{13}$, то можно записать:

$(x_3 - x_1) - x_{13} = b_{13}$ и получить линейное уравнение с тремя неизвестными.

Если записать аналогичные зависимости для всех событий и работ, входящих в нашу сеть, то получим систему:

$$\begin{cases}(T_2 - T_1) - \Delta_{12} = t_{12};\\(T_3 - T_1) - \Delta_{13} = t_{13};\\(T_3 - T_2) - \Delta_{23} = t_{23};\\(T_4 - T_2) - \Delta_{24} = t_{24};\\(T_4 - T_3) - \Delta_{34} = t_{34}.\end{cases}$$

Эта система описывает топологию (структуру) нашей сети. Следовательно, сеть может быть представлена не только графически, но и в виде аналитических уравнений, которые можно ввести в ППК.

Если вместо t_{ij} подставить их известные (заданные) значения, получим:

$$\left.\begin{aligned}(T_2 - T_1) - \Delta_{12} = 1;\\(T_3 - T_1) - \Delta_{13} = 2;\\(T_3 - T_2) - \Delta_{23} = 4;\\(T_4 - T_2) - \Delta_{24} = 3;\\(T_4 - T_3) - \Delta_{34} = 6.\end{aligned}\right\}$$

Эта система структуры сети содержит пять линейных уравнений с девятью неизвестными. Значит, она имеет бесчисленное множество решений. Чтобы ее решить надо добавить граничные условия и ЦФ.

При этом возможны две постановки задач оптимизации.

Первая постановка: задаемся временем начала работ, т.е. значением T_1, например, $T_1=0$, и стремимся закончить комплекс работ как можно раньше:

$$\begin{cases}L_1 = T_4 \to \min;\\T_1 = 0.\end{cases}$$

Вторая постановка: задан срок завершения всех работ, например, $T_4=15$ и нас интересует как можно позже начать работы, но чтобы непременно уложиться в срок:

$$\begin{cases}L_2 = T_1 \to \max;\\T_4 = 15.\end{cases}$$

Обе постановки - это задачи ЛП, которые можно решить (табл.8)

Таблица 8

Постановка	ЦФ	Граничные условия	T_1	T_2	T_3	T_4	Δ_{12}	Δ_{13}	Δ_{23}	Δ_{24}	Δ_{34}
1	$T_4 \to \min$	$T_1 = 0$	0	1	5	11	0	3	0	7	0
2	$T_1 \to \max$	$T_4 = 15$	4	5	9	15	0	3	0	7	0

на +4 больше, чем в 1-й постановке

Из таблицы видно, что резерв Δ_{ij} не зависит от постановки задачи. Времена же окончания работ в первой постановке и начала работ во второй постановке определяются заданными граничными условиями.

Теперь перейдем к определению критического пути и других параметров сети, заданной в общей постановке.

В общем виде топология сети запишется:

$$(*) \qquad (T_j - T_i) - \Delta_{ij} = t_{ij} \quad \text{(для всех i, j).}$$

Если обозначить S - число событий, R - число работ, то, как видно из (*), система, описывающая сеть, будет включать n переменных, где n=S+R, так как каждому i-му событию соответствует неизвестная T_i, а каждой i, j-й работе - неизвестная Δ_{ij}. А число ограничений m=R, т.е. каждой работе соответствует ограничение.

Поэтому в начальных сетях одна строка (*) превращается в систему линейных уравнений, содержащую сотни, а может быть и тысячи неизвестных и ограничений.

Тогда общие постановки запишутся:

$$\begin{cases} L_1 = T_n \to \min; \\ T_1 \geq T_{1пл}. \end{cases} \qquad \begin{cases} L_2 = T_1 \to \max; \\ T_n \geq T_{nпл}. \end{cases}$$

где $T_{1\,пл}$, $T_{n\,пл}$ - заданные плановые сроки начала и окончания работ сети.

Например, для графика (рис.11) из 11 событий и 20 работ (всего лишь) первая постановка при T_1=0 будет иметь вид:

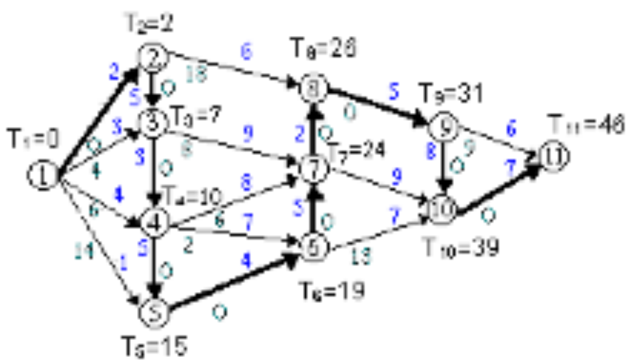


Рис.11 – Определение критического пути

$$\begin{cases} L_1 = T_{11} \to \min; \\ (T_j - T_i) - \Delta_{ij} = t_{ij} \quad (i = 1..10;\ j = 2..11); \\ T_1 = 0. \end{cases}$$

В результате решения задачи на ППК определены критический путь, сроки начала работ и событий, резервы работ, приведенные под стрелками. Решение этой задачи вручную очень трудоемко!

5. КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ

ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИИ.

В общем виде задача о назначениях формулируется следующим образом. Пусть имеются n работ и n кандидатов для их выполнения. Назначению i-го кандидата (i=1..n) на j-ю работу (j=1..n) соответствует определенная эффективность (прибыль, производительность) или затраты какого-либо ресурса c_{ij}. Требуется найти такие назначения кандидатов на все работы, которые обеспечат наибольшую эффективность, т.е. минимум суммарных затрат или максимум прибыли (производительности). При этом каждого кандидата можно назначить только на одну должность и каждая работа может быть выполнена только одним кандидатом.

Математическая постановка задачи имеет вид:

$$\max(\min)L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij};$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (i = 1..n);$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (j = 1..n);$$

$$x_{ij} = \{0 \wedge 1\} \quad (i, j = 1..n),$$

где x_{ij} - искомая переменная:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если i-й кандидат распределяется на j-ю работу;} \\ 0 \text{ - в противном случае.} \end{cases}$$

В такой постановке данная задача относится к классу комбинаторных, решение которых путем прямого перебора невозможно при достаточно больших n, так как число вариантов назначений составляет n!

Известны несколько различных методов решения комбинаторных задач, из которых наиболее распространен **венгерский метод**.

Основная идея этого метода: оптимальность решения задачи не нарушается при уменьшении (увеличении) элементов строки (столбца) на одну и ту же величину d_i (d_j). Решение считают оптимальным, если все измененные искусственно затраты $c_{ij}' \geq 0$ (i, j = 1..n) и можно отыскать такой набор x_{ij}, что

$$L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{'} x_{ij} = n.$$

Пример 5. Пусть для монтажа четырех объектов (n=4) требуется четыре крана (n=4). Известно время монтажа каждым i-м краном каждого j-го объекта (табл.9). Необходимо так распределить краны по объектам, чтобы суммарное время монтажа всех объектов было минимально.

Таблица 9

Код крана (i)	Затраты времени на монтаж по объектам (c_{ij})				a_i	d_i
	1	2	3	4		
1	3	7	5	8	1	3
2	2	4	4	5	1	2
3	4	7	2	8	1	2
4	9	7	3	8	1	3

Решение:

Соответственно исходным данным задача формализуется:

$$\begin{aligned}
&\min\ L=3x_{11}+7x_{12}+5x_{13}+8x_{14}+2x_{21}+...+8x_{44},\\
&x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=1,\\
&\dots\\
&x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}=1,\\
&x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=1,\\
&\dots\\
&x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=1,\\
&x_{ij}=\{0 \wedge 1\} \quad (i,j = 1..4).
\end{aligned}$$

Алгоритм метода включает следующие основные этапы (шаги).

Шаг 1. Получение нулей в каждой строке.

1.1. Находят наименьший элемент d_i в каждой строке (табл.9), который вычитают из всех ее элементов и получают новую матрицу (табл.10).

1.2. Аналогично в каждом столбце определяют его минимальный элемент d_i, который вычитают из всех его элементов с получением следующей матрицы (табл.6.3)

Шаг 2. Поиск оптимального решения.

2.1. Рассматривается одна из строк табл.11, имеющая меньшее число нулей (строка 1); отмечается звездочкой (*) один из нулей этой строки (c_{11}=0) и зачеркиваются все остальные нули этой строки и того столбца, в котором находится этот нуль (c_{21}).

2.2. Аналогичные операции выполняют последовательно для всех строк.

2.3. Если назначения, которые получены при всех нулях, отмеченных звездочками, являются полными, т.е. число нулей, отмеченных точками, равно n, то решение является оптимальным. В противном случае переходят к шагу 3.

Таблица 10

i	c_{ij}				a_i
	1	2	3	4	
1	0=(3-3)	4=(7-3)	2	5	1
2	0	2	2	3	1
3	2	5	0	6	1
4	6	4	0	5	1
b_j	1	1	1	1	-
d_i	0	2	0	3	

Шаг 3. Поиск минимального набора строк и столбцов, содержащих нули.

3.1. Отмечают звездочкой:

a) все строки, в которых нет ни одного отмеченного звездочкой нуля (строка 4, табл. 11);

b) все столбцы, содержащие перечеркнутый нуль хотя бы в одной из отмеченных точкой строк (столбец 3, табл.11);

c) все строки, содержащие отмеченные звездочкой нули хотя бы в одном из отмеченных звездочкой столбцов (строка 3, табл.11);

Таблица 11

i	c_{ij}				a_i
	1	2	3^*	4	
1	0^*	2	2	2	1
2	$\cancel{0}'$	0^*	2	$\cancel{0}'$	1
3^*	2	3	0^*	3	1
4^*	6	2	$\cancel{0}'$	2	1
b_j	1	1	1	1	-

3.2. Шаги 3.1.b) и 3.1.c) повторяют поочередно до тех пор, пока есть что отмечать.

3.3. После этого зачеркивают каждую непомеченную строку и каждый помеченный столбец (строки 1, 2 и столбец 3, табл.11) с целью провести минимальное число горизонтальных и вертикальных прямых, пересекающих по крайней мере один раз все нули.

Таблица 12

i	j				a_i
	1	2	3^*	4	
1	0^*	2	4	2	1
2	$\cancel{0}'$	0^*	4	$\cancel{0}'$	1
3	$\cancel{0}'$	1	0^*	1	1

Шаг 4. Перестановка некоторых нулей.

4.1. Определяют наименьшее число из тех клеток, через которые не проведены прямые (не зачеркнуты), т.е. число 2 в табл.11.

4.2. Это число вычитают из каждого числа невычеркнутых столбцов и прибавляют к каждому числу вычеркнутых строк с получением табл.12.

Если эти операции не приводят к оптимальному решению, то цикл повторяется, начиная с шага 2 до получения оптимума.

В данном случае число нулей, отмеченных точкой, оказалось равным 4, значит назначение является полным, а решение оптимальным, т.е.

$$x_{11}^0 = x_{22}^0 = x_{33}^0 = x_{44}^0 = 1; \min L = c_{11} + c_{22} + c_{33} + c_{44} = 3+4+2+8=17.$$

Контрольные вопросы и задания.

1. Используя геометрическую интерпретацию, решить задачи дробно-линейного программирования:

$$1.1\ \begin{cases} \max L = \dfrac{8x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 300; \\ x_1 + 2x_3 + x_4 \le 70; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 340; \\ x_1, \dots, x_4 \ge 0. \end{cases} \qquad 1.2\ \begin{cases} \max L = \dfrac{2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + x_5 + 8x_6}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6}; \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 + x_6 = 120; \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 4x_5 + 2x_6 = 320; \\ x_1, \dots, x_6 \ge 0. \end{cases}$$

$$1.3\ \begin{cases} \max L = \dfrac{5x_1 + x_2 + 8x_3 + 10x_4 + 5x_5 + x_6}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6}; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_4 + x_5 \le 40; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_6 = 20; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 + x_6 \ge 30; \\ x_1, \dots, x_6 \ge 0. \end{cases} \qquad 1.4\ \begin{cases} \max F = \dfrac{5x_1 + 3x_2}{x_1 + 3x_2}; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 12; \\ -x_1 + 6x_2 + x_4 = 18; \\ x_1 - 3x_2 + x_5 = 3; \\ x_1, x_2, \dots, x_5 \ge 0. \end{cases}$$

$$1.5\ \begin{cases} \min F = \dfrac{-5x_1 + 4x_2}{-2x_1 - 3x_2}; \\ 2x_1 - 4x_2 \le 12; \\ -x_1 + 2x_2 \le 8; \\ x_1 + x_2 \ge 10; \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases} \qquad 1.6\ \begin{cases} \max F = \dfrac{3x_1 - 2x_2}{x_1 + 2x_2}; \\ 2x_1 + 4x_2 \le 16; \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8; \\ x_1 + 3x_2 \ge 9; \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2. Решить задачу параметрического программирования:

$$\begin{cases} \max F = 2x_1 + (3 + 4t)x_2; \\ x_1 + x_2 \le 12; \\ x_1 - x_2 \le 10; \\ -x_1 + x_2 \le 6; \\ x_1, x_2 \ge 0; \\ -0{,}5 \le t \le 0. \end{cases}$$

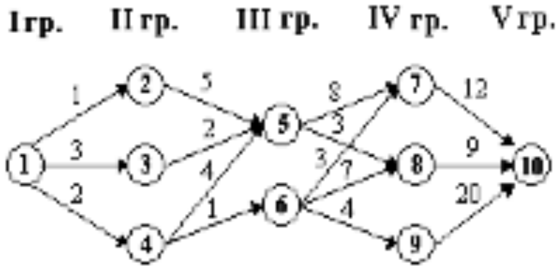
3. Поставить задачу: Пусть для производства трех видов изделий предприятие использует три вида сырья. Нормы расхода каждого вида сырья определяют-

ся матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Предприятие может использовать сырья I вида не более 20 ед., II вида - не более 42 ед., III вида - не более 36 ед. Цена продукции каждого вида линейно зависит от некоторого параметра t и эта зависимость соответственно имеет вид 2+t, 12-t, 6+t. Для каждого значения параметра $0 \le t \le 10$ определить максимальную выручку.

4. Поставить задачу: Пусть для производства n видов продукции, сбыт которой обеспечен, предприятие использует m видов ресурсов. Норма расхода ресурса i-го вида на единицу продукции j-го вида равна a_{ij} (i=1..m; j=1..n). Известна также прибыль от реализации единицы продукции j-го вида, равная c_j (j=1..n). Предприятие может использовать не более $b_i' + b_i'' t$ (i=1..m) единиц i-го вида ресурса, где t - некоторый параметр, значение которого принадлежит промежутку изменения (α,β). Для каждого значения t определить план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

5. Поставить задачу: Пусть на предприятии m видов продукции могут производиться n технологическими способами. Потребность в продукции каждого вида определяется числами b_j (i=1..m). Количество i-й продукции, изготавливаемой j-м технологическим способом в единицу времени, равно $a_{ij}' + a_{ij}'' t$, где t - некоторый параметр, $(\alpha \le t \le \beta)$. Для каждого значения параметра t определить план производства продукции, при котором необходимое количество продукции каждого вида будет изготовлено за минимальное время.

6. Определить оптимальный вариант маршрутной технологии обработки деталей на пяти группах взаимозаменяемого оборудования, если известны технологические себестоимости каждой операции обработки и все возможные варианты технологических маршрутов.



7. Поставить и решить задачу с помощью QSB: На предприятии имеется 5 видов оборудования, каждый из которых может выполнять 5 различных операций. Нормы времени на выполнение каждой операции заданы в таблице. Определить, какую операцию закрепить за каким оборудованием с тем, чтобы суммарное время выполнения операций было минимальным.

Как изменится постановка задачи, если данные из таблицы интерпретировать как производительность оборудования?

Оборудование	Нормы времени по операциям				
	1	2	3	4	5
1	5	3	4	6	7
2	6	2	6	4	5
3	4	3	5	6	6
4	3	4	3	4	3
5	5	6	3	2	5

РАЗДЕЛ III. ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И ТЕОРИИ ИГР

1.КЛАССИФИКАЦИЯ И ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ НЛП

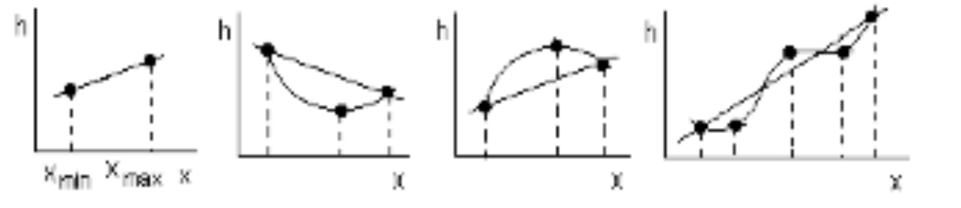
Задачи НЛП - большой класс разнообразных задач, из которых будем рассматривать только сводящиеся к задачам ЛП.

Ранее в задачах ЛП полагалось, что себестоимость, цена и др. показатели эффективности на ед. продукции не зависят от изменения объема производства. Однако в общем случае зависимости между переменными в ограничениях и целевой функции не могут быть линейными. Например, себестоимость ед. продукции снижается при увеличении объема производства.

Задачи, в которых зависимости между переменными в ЦФ и/или в ограничениях нелинейны, называют **задачами НЛП**.

Если обозначить ЦФ и ограничения через обобщенную функцию $h(x_j)$, то все многообразие задач НЛП можно свести к классификации (табл. 1).

Таблица 1.

График				
Отрезок, соединяющий две точки	совпадает	выше вершины	ниже вершины	по обе стороны от вершины
$\partial^2 h / \partial^2 x$	0	> 0	< 0	меняет знак
Вид функции	линейная	выпуклая вниз	выпуклая вверх (вогнутая вниз)	смешанная
Число оптимумов	2	3	3	несколько

В общем виде задача НЛП состоит в определении максимума (минимума) функции

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad (1)$$

при условии, что ее переменные удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i \quad (i = 1..k); \\ g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i \quad (i = k+1, m), \end{cases} \qquad (2)$$

где f и g_i некоторые известные функции n переменных; b_i - заданные числа.

Здесь имеется в виду, что в результате решения задачи будет определена точка $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ... , x_n^0)$, координаты которой удовлетворяют соотношениям (2), и такая, что для всякой другой точки $x=(x_1, x_2, ... , x_n)$, удовлетворяющей условиям (2), выполняется неравенство

$$f(x_1^0, x_2^0, ... , x_n^0) \ge f(x_1, x_2, ... , x_n) \text{ при max ЦФ или}$$

$$f(x_1^0, x_2^0, ... , x_n^0) \le f(x_1, x_2, ... , x_n) \text{ - при min ЦФ.}$$

Если f и g_i - линейные функции, то задача (1), (2) - задача ЛП.

Соотношения (2) образуют систему ограничений и включают условия неотрицательности переменных, если такие имеются. Условия неотрицательности переменных могут быть заданы и непосредственно.

Метод множителей Лагранжа. Рассмотрим частный случай общей задачи НЛП (1), (2), предполагая, что система ограничений (2) содержит только уравнения, отсутствуют условия неотрицательности переменных и функции f и g_i - непрерывные вместе со своими частными производными

$$\max (\min) f(x_1, x_2, ... , x_n); \qquad (1)$$

$$g_i(x_1, x_2, ... , x_n) = b_i \quad (i=1..m). \qquad (2)$$

В курсе математического анализа задачу (1), (2) называют задачей на условный экстремум или классической задачей оптимизации.

Чтобы найти решение такой задачи, вводят набор переменных $\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_m$, называемых множителями Лагранжа и составляют функцию Лагранжа

$$F(x_1, x_2, ... , x_n, \lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ... , x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [b_i - g_i(x_1, x_2, ... , x_n)], \qquad (3)$$

находят частные производные $\frac{\partial F}{\partial x_j}$ (j=1..n) и $\frac{\partial F}{\partial \lambda_i}$ (i=1..m), рассматривают систему n+m уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_j} = b_i - g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

с n+m неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$.

Всякое решение системы (4) определяет точку $x = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, в которой может иметь место экстремум функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Следовательно, решив систему (4), получают все точки, в которых функция (1) может иметь экстремальные значения. Дальнейшее исследование найденных точек проводят так же, как и в случае безусловного экстремума.

Пример 1. Известен рыночный спрос на определенное изделие в количестве 180 штук. Это изделие может быть изготовлено двумя предприятиями одного концерна по различным технологиям. При производстве x_1 изделий первым предприятием его затраты составят $4x_1 + x_1^2$ руб., а при изготовлении x_2 изделий вторым предприятием они составляют $8x_2 + x_2^2$ руб. Определить, сколько изделий, изготовленных по каждой технологии, может предложить концерн, чтобы общие издержки его производства были минимальны.

Решение:

Задача запишется в виде:

$$\min f = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2; \qquad (5)$$

$$x_1 + x_2 = 180; \qquad (6)$$

$$x_1, x_2 \ge 0. \qquad (7)$$

Для нахождения минимального значения функции (5) при условии (6), т.е. без учета требования неотрицательности переменных составляется функция Лагранжа

$$F(x_1, x_2, \lambda) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 + \lambda(180 - x_1 - x_2),$$

вычисляются ее частные производные по x_1, x_2, λ и приравниваются нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 4 + 2x_1 - \lambda = 0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 8 + 2x_2 - \lambda = 0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 180 - x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $4+2x_1=8+2x_2$ или $x_1+x_2=2$. Решая это уравнение совместно с $x_1+x_2=180$, находим $x_1^0=91$; $x_2^0=89$, т.е. получили координаты точки, подозрительной на экстремум. Используя вторые частные производные можно показать, что в этой точке функция f имеет условный минимум.

Вывод. Такой же результат можно получить, если исследование на условный экстремум функции f свести к исследованию на безусловный экстремум функции f1, полученной из f в результате ее преобразований.

Т.о., если из уравнения связи $x_1+x_2=180$ найти $x_2=180-x_1$ и подставить это выражение в ЦФ, то получится функция одной переменной x_1:

$$f_1 = 4x_1 + x_1^2 + 8(180 - x_1) + (180 - x_1)^2.$$

Далее из уравнения $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0$ можно найти стационарную точку этой функции f_1: $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 4 + 2x_1 - 8 - 2(180 - x_1) = 0$, или $4x_1-364=0$, откуда $x_1^0=91$; $x_2^0=180-91=89$. Используя вторые частные производные, устанавливаем, что в данной точке функция f имеет минимальное значение.

Метод кусочно-линейной аппроксимации. Пусть требуется определить максимальное значение вогнутой функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \qquad (1)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x_j) \le b_i (i = 1..m); \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0 (j = 1..n). \qquad (3)$$

Чтобы найти решение задачи (1)-(3) функции $f_j(x_j)$ и $g_{ij}(x_j)$ заменяют кусочно-линейными функциями $\hat{f}_j(x_j)$ и $\hat{g}_{ij}(x_j)$ и переходят к задаче

$$\max F = \sum_{j=1}^{n} \hat{f}_j(x_j) \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{g}_{ij}(x_j) \le b_i (i = 1..m); \tag{5}$$

$$x_j \ge 0 (j = 1..n). \tag{6}$$

В задаче (4)-(6) пока не определен вид функций. Чтобы определить их, считают, что переменная x_j может принимать значения из промежутка $[0; \alpha_j]$, где α_j - максимальное значение переменной x_j. Промежуток $[0; \alpha_j]$ разбивается на r_j промежутков с помощью r_j+1 точек так, что $x_{0j} = 0, x_{r_j j} = \alpha_j$. Тогда функции $\hat{f}_j(x_j)$ и $\hat{g}_{ij}(x_j)$ можно записать в виде

$$\hat{f}_j(x_j) = \sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} f_{kj}; \quad \hat{g}_{ij}(x_j) = \sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} g_{kj}, \tag{7}$$

$$\text{где } f_{kj} = f_j(x_k); \quad g_{kij} = g_{ij}(x_k) \quad (i = 1..m); \tag{8}$$

$$x_j = \sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} x_{kj}.$$

Причем $\sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} = 1, \quad \lambda_{kj} \ge 0$ для всех k и j.

Подставляя теперь в (4), (5) выражения функций $\hat{f}_j(x_j)$ и $\hat{g}_{ij}(x_j)$ в соответствии с формулой (7), приходят к задаче ЛП:

$$\max \hat{F} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{r_j} f_{kj} \lambda_{kj}; \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{r_j} g_{kij} \lambda_{kj} \le b_i \qquad (i = 1..m); \tag{10}$$

$$\sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} = 1 \qquad (j = 1..n); \tag{11}$$

$$\lambda_{kj} \ge 0 \qquad (k = 0..r_j; \ j = 1..n) \tag{12}$$

Эта задача может быть решена симплекс-методом и точность зависит от принятого шага разбиения промежутка $[0; \alpha_j]$: чем меньше шаг, тем точнее решение.

Пример 2. Решить задачу НЛП методом кусочно-линейной аппроксимации:

$$\max F = x_2 - x_1^2 + 6x_1 - 9;$$

$$2x_1 + 3x_2 \le 24;$$

$$x_1 + 2x_2 \le 15;$$

$$3x_1 + 2x_2 \le 24;$$

$$x_2 \le 4;$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Решение:

В данной задаче целевую функцию F можно представить как сумму двух функций $f_1(x_1)=-x_1^2+6x_1-9$ и $f_2(x_2)=x_2$, каждая из которых есть функция одной переменной. Следовательно, функция F - сепарабильная.

Здесь нелинейной функцией является только ЦФ. Значит, кусочно-линейной функцией следует заменить только ее. При этом так как функция $f_2(x_2)$ линейная, то аппроксимируется только функция $f_1(x_1)$.

Далее строится область допустимых решений задачи (рис.1).

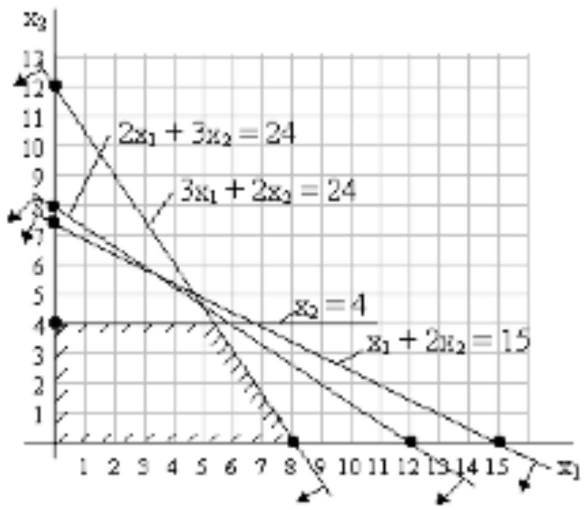


Рис. 1

Из графика ОДЗ следует, что переменная x_1 может принимать значения в промежутке [0; 8]. Этот промежуток может быть разбит на восемь частей точками: $x_{01}=0$; $x_{11}=1$; $x_{21}=2$; $x_{31}=3$; $x_{41}=4$; $x_{51}=5$; $x_{61}=6$; $x_{71}=7$; $x_{81}=8$. В этих точках вычисляются значения функции $f_1(x_1)$ (табл.2).

Таблица 2

x_{k1}	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_1(x_{k1})$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	-16	-25

По формулам (7), (8) можно найти

$$\widehat{f}_1(x_1) = -9\lambda_{01} - 4\lambda_{11} - \lambda_{21} - \lambda_{41} - 4\lambda_{51} - 9\lambda_{61} - 16\lambda_{71} - 25\lambda_{81};$$
$$x_1 = 0\lambda_{01} + 1\lambda_{11} + 2\lambda_{21} + 3\lambda_{31} + 4\lambda_{41} + 5\lambda_{51} + 6\lambda_{61} + 7\lambda_{71} + 8\lambda_{81}.$$

Найденные выражения $\widehat{f}_1(x_1)$ и x_1 подставляются в исходные данные:

$$\begin{cases} \max \widehat{F} = -9\lambda_{01} - 4\lambda_{11} - \lambda_{21} - \lambda_{41} - 4\lambda_{51} - 9\lambda_{61} - 16\lambda_{71} - 25\lambda_{81} + x_2; \\ 2\lambda_{11} + 4\lambda_{21} + 6\lambda_{31} + 8\lambda_{41} + 10\lambda_{51} + 12\lambda_{61} + 14\lambda_{71} + 16\lambda_{81} + 3x_2 + x_3 = 24; \\ \lambda_{11} + 2\lambda_{21} + 3\lambda_{31} + 4\lambda_{41} + 5\lambda_{51} + 6\lambda_{61} + 7\lambda_{71} + 8\lambda_{81} + 2x_2 + x_4 = 15; \\ 3\lambda_{11} + 6\lambda_{21} + 9\lambda_{31} + 12\lambda_{41} + 15\lambda_{51} + 18\lambda_{61} + 21\lambda_{71} + 24\lambda_{81} + 2x_2 + x_5 = 24; \\ x_2 + x_6 = 4; \\ \lambda_{01} + \lambda_{11} + \lambda_{21} + \lambda_{31} + \lambda_{41} + \lambda_{51} + \lambda_{61} + \lambda_{71} + \lambda_{81} = 1; \\ x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0; \qquad \lambda_{k1} \ge 0 \quad (k = 0..8). \end{cases}$$

Для полученной задачи ЛП пять векторов P_{01}, P_3, P_4, P_5, P_6 являются единичными. Значит ее решение может быть найдено симплекс-методом. Из симплекс-таблицы находят $x_2^0=4$, а по найденному λ_{k1} находят $x_1^0=3$, $F_{max}=4$.

2.Задачи динамического программирования

До сих пор рассматривались такие задачи оптимизации, в которых принятие решения осуществлялось в один этап. Зависимость рассматриваемого этапа от прошлого и его влияние на будущее не учитывалось.

В реальных задачах управления приходится принимать и реализовывать решения по нескольким этапам. Такие задачи многоэтапной оптимизации называют задачами динамического программирования, в том числе:

- распределение ресурсов, например, ограниченного объема капиталовложений между возможными направлениями их использования по объему и времени;
- разработка правил управления запасами, устанавливающих момент пополнения и размер пополняемого запаса;
- выбор транспортных маршрутов или технологических способов изготовления изделий;
- разработка принципов календарного планирования производства и др.

Пример 3. Пусть установлены возможные варианты транспортной сети из маршрутов, соединяющих исходный пункт 1 с конечным пунктом 10. Все 10 пунктов можно отнести к пяти зонам (этапам). На линиях, соединяющих пункты, поставлено время проезда между соседними пунктами (рис.2). Требуется выбрать путь от начального до конечного пункта с минимальным временем.

Аналогичная задача может быть поставлена и для оптимизации технологического маршрута изготовления изделия, если на сети маршрутов задаться трудоемкостью или стоимостью каждой технологической операции.

Искомый путь может быть найден интуитивно, а затем его можно сравнить с полученным оптимальным решением.

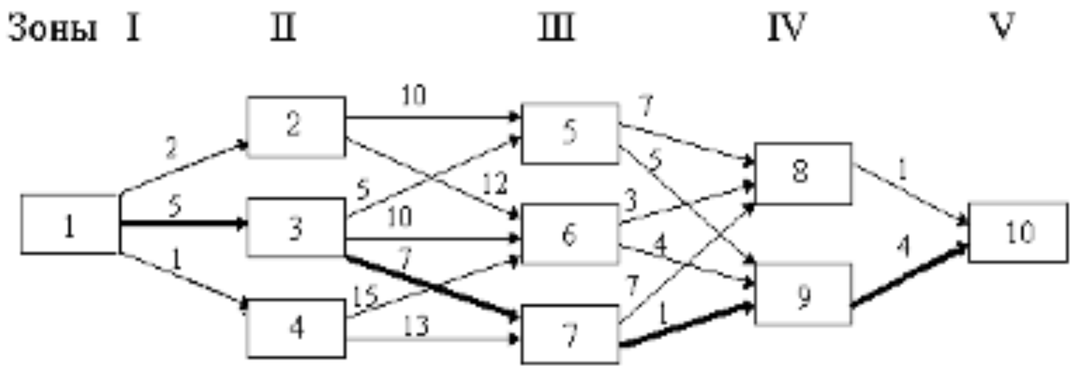


Рис.2

Решение:

В основе решения задач ДП лежит принцип оптимальности**:** на каждом этапе принимается такое решение, которое обеспечивает оптимальность с данного этапа до конца процесса, т.е. на каждом этапе необходимо принимать решение, просматривая его последствия до самого конца. А так как последовательность решения следует просматривать до конца процесса, то варианты анализируют, начиная с конца процесса.

Допустим, мы оказались в зоне IV (пп. 8, 9), из которой надо продвинуться в зону V (п. 10) (табл.3.1).

Таблица 3.1

Из пп. IV зоны	В п. 10 зоны V	min $T_{IV\text{-}V}$
8	1	**1**
9	4	**4**

Таблица 3.2

Из пп. III зоны	Через пп. IV зоны		min $T_{III\text{-}V}$
	8	9	
5	7+**1**	5+**4**	8
6	3+1	4+4	4
7	7+1	1+4	5

Таблица 3.3

Из пп. II зоны	Через пп. Ш зоны			min $T_{II\text{-}V}$
	5	6	7	
2	10+8	12+4	-	16
3	5+8	10+4	7+5	12
4	-	15+4	13+5	18

Таблица 3.4

Из пп. I зоны	Через пп.II зоны			min $T_{I\text{-}V}$
	2	3	4	
1	2+16	5+12	1+18	**17**

Таким образом, следуя от конца маршрутов, мы сначала определили, через какой пункт двигаться при условии, чтобы оказаться в зоне III, затем при условии, чтобы оказаться в зоне II, и, наконец - в зоне I. Следовательно, на первом цикле решения определилось условно-оптимальное решение. Во втором - следуя от начала к концу маршрута по табл. 3.1-3.4, где условно-оптимальные решения не затемнены, находим действительно оптимальное решение:

из табл.3.4.: п.1→п.3; из табл.3.3.: п.3→п.7; из табл.3.2.: п.7→п.9; из табл.3.1.: п.9→п.10.

Обобщенная схема задачи дп (распределение ресурсов). Пусть имеется ресурс K, который требуется вложить в m объектов в течение n этапов. В результате вложения в i-й объект (i=1..m) на j-м этапе (j=1..n) ресурса в размере x_{ij} образуется доход, определяемый функцией дохода $g_{ij}(x_{ij})$. Часть ресурса x_{ij} при этом остается неизрасходованной. Эта часть определяется функцией остатка $\varphi_{ij}(x_{ij})$. Известна величина ресурса K_j, распределяемая на каждом j-м этапе.

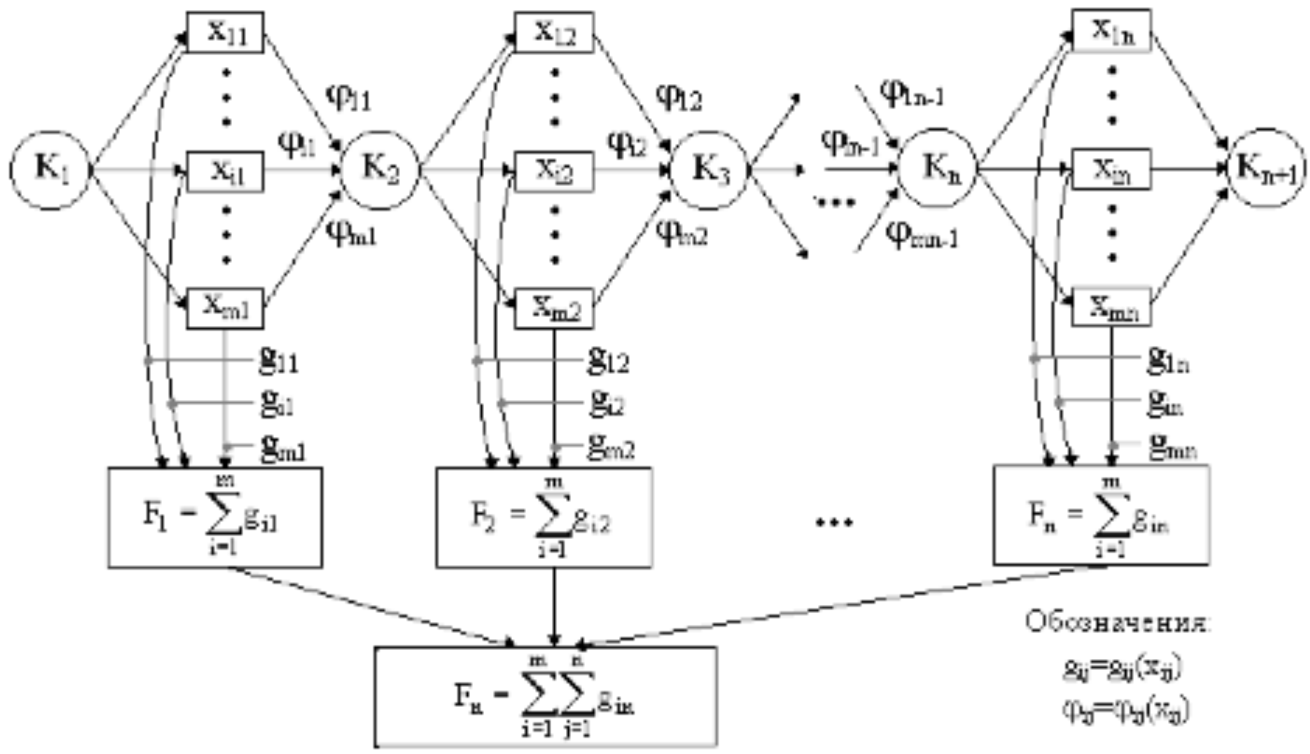


Рис.3. Схема поэтапного распределения ресурсов

Требуется определить значения x_{ij} вложения ресурсов на каждом этапе в каждый объект, чтобы на всех объектах и на всех этапах был максимальным (рис.3).

Данная задача аналитически формулируется:

$$\max F = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x_{ij});$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = k_j \qquad (j = 1..n);$$
$$\sum_{i=1}^{m} \varphi_{ij}(x_{ij}) = k_{j+1} \quad (j = 1..n);$$
$$x_{ij} \ge 0 \quad (i = 1..m; j = 1..n).$$

Принцип оптимальности Беллмана: на каждом этапе необходимо так распределять ресурс, чтобы начиная с этого этапа и до конца процесса распределения, доход был максимальным.

Условность задач ЛП применительно к управлению состоит в оптимизации только для какой-то стационарной ситуации. В действительности задачи управления динамичны, поэтому точнее определять оптимум не для одного момента времени, а последовательно на протяжении длительного периода.

Например, недостаточно определить оптимальный план производства на месяц, вполне вероятно, что в последующие месяцы производство может быть неоптимальным, так как возможности дальнейшего развития не учитывались. Составление ежемесячных оптимальных планов более эффективно с учетом предшествующих периодов, так как годовой оптимальный план будет результатом оптимальных решений, принятых для каждого месяца; причем план каждого последующего месяца должен учитывать решения, принятые в предыдущих.

ДП дает возможность принять ряд последовательных решений (многошаговый процесс), обеспечивающих *оптимальность развития процесса в целом.*

Предположим, что есть некоторые ресурсы x, которые распределяются на два предприятия: на первое y, на второе x-y. Пусть в течение определенного периода (например, года) количество y приносит доход (прибыль) g(y), а количество x-y доход h(x-y). Общий доход от вложенных ресурсов составит

$$R_1(x, y) = g(y) + h(x-y).$$

Обозначим через $F_1(x)$ наибольший доход, который могут принести ресурсы x при оптимальном распределении их между предприятиями. Тогда

$$F_1(x) = \max_{0 \le y \le x}[g(y) + h(x - y)]. \tag{1}$$

Теперь рассмотрим двухшаговый процесс, состоящий из двух периодов (этапов). Так как доход получается вследствие выпуска и реализации продукции, что связано с определенными издержками (затратами ресурсов), то к началу второго периода первоначальная сумма y уменьшится до величины $a \cdot y$ ($0 \le a \le 1$), а сумма x-y до величины $b \cdot (x-y)$ ($0 \le b \le 1$). Наибольший доход, который можно получить от суммарного остатка $a \cdot y + b \cdot (x-y)$ в течение второго этапа, равен $F_1[a \cdot y + b \cdot (x-y)]$.

Обозначим через $F_2(x)$ наибольший доход, который может быть получен от суммы x за оба периода. Этот доход равен максимальному значению суммы доходов первого и второго периодов при условии, что начальные для каждого периода ресурсы распределялись наилучшим образом. Иначе

$$F_2(x) = \max_{0 \le y \le x}\{g(y) + h(x - y) + F_1[a \cdot y + b(x - y)]\}. \tag{2}$$

Равенство (2) устанавливает связь между функциями $F_1(x)$ и $F_2(x)$.

Рассматривая n-шаговый процесс, приходим к **основному функциональному уравнению Беллмана**

$$F_n(x) = \max_{0 \le y \le x}\{g(y) + h(x - y) + F_{n-1}[a \cdot y + b(x - y)]\}, \tag{3}$$

устанавливающему связь между $F_n(x)$ и $F_{n-1}(x)$.

Определив по равенству (1) $F_1(x)$, пользуясь (2), вычисляем $F_2(x)$, затем $F_3(x)$ и т.д. Значение $F_n(x)$ является доходом, полученным за n шагов.

Основное функциональное уравнение Беллмана является математической формулировкой принципа оптимального динамического программирования: *оптимальное поведение (управление) обладает свойством - каковы бы ни были* *первоначальное состояние и решение в начальный момент, последующие решения должны составлять оптимальное поведение относительно состояния, полученного в результате предыдущего решения*.

Это означает, как следует из уравнения Беллмана, что максимальный доход от n-шагового процесса равен сумме доходов от 1-го и (n-1) последующих шагов при условии наилучшего распределения в последующих шагах оставшихся после 1-го шага ресурсов.

Балансирование производственных мощностей и программы предприятия.

Пример 4.

Пусть известны возможные значения эффективности (например, прирост прибыли, выпуск продукции и др.) на каждом из четырех предприятий отрасли в результате расширения действующих мощностей (табл.4).

Таблица 4

Капитало-вложения (x), д.е.	Прирост выпуска продукции i-го предприятия $g_i(x)$, д.е./год			
	11	22	33	44
0	0	0	0	0
50	25	30	36	28
100	60	70	64	56
150	100	90	95	110
200	140	122	130	142

Требуется составить план распределения ограниченных капиталовложений по этим предприятиям (К=200 д.е.), максимизирующий общий прирост выпуска при заданной номенклатуре и структуре отраслевого плана производства продукции.

Решение:

Данная задача может быть решена методом динамического программирования.

Обозначим: $g_i(x)$ - прирост выпуска продукции (д.е./год) на i-м предприятии при x д.е. капиталовложений на реконструкцию или расширение активной части его основных фондов; F(K) - максимально возможный прирост выпуска продукции(д.е./год) при распределении суммы К между четырьмя предприятиями.

Тогда согласно основному функциональному уравнению Беллмана (3):

$$F_4(K) = \max_{0 \le x \le K}[g_4(x) + F_3(K - x)]; \qquad (4)$$

. . .

$$F_1(x) = \max_{0 \le x \le K}[g_1(x)] = g_1(x), \qquad (5)$$

т.е. максимальный прирост выпуска продукции на первом предприятии при распределении для него x (0≤x≤K) д.е. капиталовложений (только для него) будет соответствовать значениям графы 2 табл.4.

Реализация задачи будет заключаться в последовательном решении аналогичных уравнений Беллмана, описывающих максимальный прирост выпуска при распределении К=200 д.е. между двумя предприятиями, затем тремя и четырьмя (табл.5). В процессе вычислений x меняется от 0 до К с шагом Δ=50 д.е.

Таблица 5

x	$F_1(x)$	$F_2(x)$	$F_3(x)$	$F_4(x)$
0	0	0	0	0
50	25	30	36	36
100	60	70	70	70
150	100	100	106	110
200	140	140	140	146

$$F_2(50) = \max_{0 \le x \le 50}[g_2(x) + F_1(50 - x)] = \max[g_2(0) + g_1(50); g_2(50) + g_1(0) = \max[0 + 25; 30 + 0] = 30;$$

$$F_2(100) = \max_{0 \le x \le 100}[g_2(x) + F_1(100 - x)] = \max[g_2(0) + g_1(100); g_2(50) + g_1(50); g_2(100) + g_1(0) =$$
$$\max[0 + 60; 30 + 25; 70 + 0] = 70;$$

$$F_2(150) = \max_{0 \le x \le 150}[g_2(x) + F_1(150 - x)] = \max[g_2(0) + g_1(150); g_2(50) + g_1(100); g_2(100) + g_1(50);$$
$$g_2(150) + g_1(0) = \max[0 + 100; 30 + 60; 70 + 25; 90 + 0] = 100;$$

$$F_2(200) = \max_{0 \le x \le 150}[g_2(x) + F_1(200 - x)] = \max[g_2(0) + g_1(200); g_2(100) + g_1(100); g_2(150) + g_1(50);$$
$$g_2(50) + g_1(150); g_2(200) + g_1(0) = \max[0 + 140; 60 + 70; 25 + 90; 100 + 30; 122 + 0] = 140; \quad \textbf{и т.д.}$$

Полученные значения максимального прироста выпуска продукции при распределении x д.е. капиталовложений ($0 \le x \le 200$) между двумя предприятиями заносятся в графу 3 табл.8.6.

Из анализа результатов расчетов (табл.8.6) следует, что наибольший прирост продукции, который может быть достигнут, составит $F_4(200)=g_4(150)+F_3(50)=110+36=146$ д.е., т.е. четвертому предприятию должно быть выделено 150 д.е., а первым трем - 50 д.е. Как распределяются эти 50 д.е. по первым трем предприятиям?

$F_3(50) = \max\limits_{0 \le x \le 50}[g_3(50) + F_2(0)] = [36 + 0] = 36,$ т.е. все оставшиеся 50 д.е. выделяются третьему заводу. Итак, решение задачи $x_1^0=x_2^0=0$; $x_3^0=50$; $x_4^0=150$ д.е.

3.Задачи стохастического программирования

Теория вероятностей, как и другие математические науки, развивалась из потребностей практики. Сегодня невозможно себе представить серьезное научное исследование в любой области без применения вероятностных методов. Однако первыми объектами вероятностных исследований были не серьезные научные проблемы, а легкомысленные игры. Так, Джероламо Кардано (1506-1576) - итальянский математик, философ и врач, с именем которого связывают формулу решения неполного кубического уравнения, создание кардана и гироскопа, утверждал, что во время осады Трои (ок. 1260 г. до н.э.) для развлечения томящихся от скуки воинов некто Галамед изобрел игральные кости в виде кубиков с числом точек на каждой строке от 1 до 6. Для игры в кости не требовалось ни знаний, ни умения. Результат бросания - чистый случай. Это была первая азартная игра.

Слово *азарт* (франц. hasard - случай, риск) происходит от арабского аззарт - игра в кости. Позже распространились игральные карты, которые в современном виде (первоначально были известны в древности) появились во Франции в XIV в. Азартные игры позволяют формировать четкие вопросы и дают возможность проводить массовые эксперименты.

В связи с этим и в наши дни изучение теории вероятностей начинают с вопросов: “сколько раз при бросании монета упадет гербом вверх?”, “какова вероятность вытащить из колоды туза пик?” и т.д.

Одно из первых исследований по теории вероятностей принадлежит итальянцу Никколо Тарталье (ок. 1499-1557), называется “Общее правило данного автора, найденное в первый день поста 1523 г. в Вероне, чтобы уметь найти, сколькими способами можно варьировать положение какого угодно количества костей при их метании”.

Из многих функциональных положений теории вероятностей остановимся только на двух.

1) Если монету бросить дважды, то совершенно не обязательно, что один раз она упадет вверх гербом, а другой - цифрами. Если же монету бросить, скажем 1000 раз, то примерно в половине случаев выпадет герб, а в половине решкой. Чем большее число раз бросать монету, тем ближе в $^1/_2$ будет частота появления гербов и цифр. Отсюда вывод: закономерности теории вероятностей тем более достоверны, чем больше число проведенных опытов.

Зависимость достоверности результатов от числа опытов определяется законом больших чисел (первое доказательство в XVII в. Якобом Бернулли).

2) Исключительно важную роль в описании случайных явлений играет нормальный закон распределения вероятностей (впервые в книге Муавра в XVIII в. “Учение о случаях”, затем Гаусс через 100 лет, и этот закон назвали его именем). Впервые эту науку теорией вероятностей назвал Лаплас.

Для того, чтобы пользоваться отдельными положениями теории вероятностей введем некоторые понятия.

Событие - всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти. Признак, что данный факт является событием, состоит в том, что ответом на вопрос “произошло ли событие?” может быть либо “да”, либо “нет”. Примеры событий: падение монеты при бросании гербом вверх, своевременная поставка сырья и др.

События могут быть достоверными, возможными и невозможными.

Достоверное - событие, которое непременно должно произойти; например, выпадение любого количества очков на игральной кости, расход ресурсов при выпуске продукции.

Невозможное - событие, которое не может произойти: появление двух тузов при вытаскивании одной карты, выпуск сверхплановой продукции без использования дополнительных ресурсов и др.

Возможное - событие, которое может произойти или не произойти: падение монеты гербом вверх, выполнение плана на 100% и др.

Для выражения возможности события используют численную меру. Численную меру возможности события называют вероятность. Вероятность события А, т.е. Р(А), можно вычислить

Р(А)=m/n, где m - число случаев, когда событие А может произойти; n - общее число случаев.

$$\text{Очевидно, что если } P(A) = \begin{cases} 0, \text{ то событие невозможно;} \\ 1, \text{ достоверное событие;} \\ >0 \text{ и } <1, \text{ событие возможное.} \end{cases}$$

Вероятность Р(А) характеризует возможность появления события А в будущем. Для оценки того, как часто события уже происходили, используют понятие частоты. Частоту события А обозначают

$P^*(A)=m^*/n$, где m^* показывает, сколько раз событие произошло; n - общее число произведенных испытаний.

Несовместными будем называть события, исключающие друг друга. Так, падение монеты вверх гербом и цифрами - это два несовместных события. Очевидно, что сумма вероятностей всех несовместных событий равна 1.

Случайные события можно характеризовать числами. Такие числа называют случайными величинами. Случайная величина может принять то или иное значение, заранее неизвестное. Например, случайные величины: объем поставленных материалов, трудоемкость операции или работы.

Конкретное измеренное значение случайной величины называют ее реализацией. Различные реализации случайной величины относят к несовместным событиям. Действительно, если трудоемкость изготовления детали составила 100 чел.-ч, то она не может быть 105 или другое значение.

Случайная величина не может быть описана одним конкретным числом. Ее можно описать либо количественными характеристиками, либо законом распределения. Наиболее распространенными характеристиками случайной величины являются: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариабельности.

Математическое ожидание характеризует среднее значение случайной величины, обозначается M_x или $M[x]$ или $\bar{x}$:

$$M[x] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i ,$$

где n - число реализаций; x_i - значение случайной величины в i-й реализации.

Дисперсия $D[x]$ (или D_x) характеризует разброс значений случайной величины:

$$D[x] = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1} .$$

Так как размерность дисперсии равна квадрату размерности самой случайной величины, использовать дисперсию для относительной оценки разброса случайной величины нельзя.

Поэтому разброс оценивают средним квадратическим отклонением:

$$\sigma_x^2 = D[x] \quad \text{или} \quad \sigma_x = \sqrt{D[x]} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} .$$

Удобной характеристикой случайной величины является коэффициент вариабельности, который показывает относительное значение разброса случайной величины:

$$\mu[x] = \sigma_x / \bar{x} .$$

Пример 5. Пусть наличие некоторого i-го ресурса в каждом квартале b_i - случайная величина. Реализация этой случайной величины - фактический объем ресурса в каждом квартале (по отчету прошлого года и трех кварталах текущего) (табл.6).

Таблица 6

Квартал	I	II	III	IV	I	II	III
b_i	90	100	105	111	89	95	110

Решение:

Тогда математическое ожидание случайной величины b_i:

$$\bar{b} = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} b_i = (90+100+105+111+89+95+110)/7=100.$$

Среднеквадратическое отклонение:

$$\sigma_b = \sqrt{\sum_{i=1}^{7}\frac{(b_i - \bar{b})^2}{6}} = \sqrt{(10^2 + 0^2 + 5^2 + 11^2 + 11^2 + 5^2 + 10^2)/6} = 9.$$

Коэффициент вариабельности:

$$\mu_b = \sigma_b / \bar{b} = 9/100 = 0.09.$$

Наиболее полная характеристика случайной величины - закон ее распределения. Он показывает, какова вероятность появления каждого возможного значения случайной величины или каким образом суммарная вероятность появления случайной величины, равная единице, распределена между ее возможными значениями. Т.е. закон распределения устанавливает связь между возможными значениями случайной величины и вероятностями их появления.

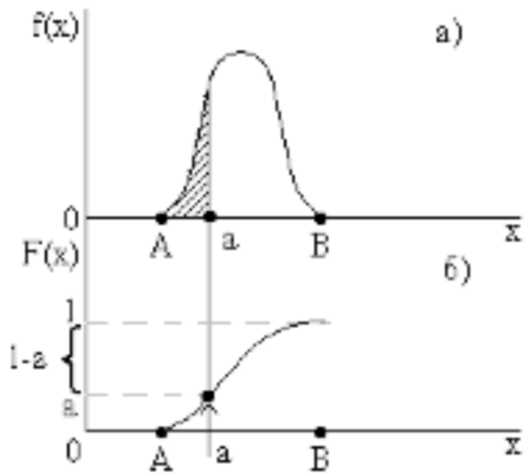


Рис.4

Из множества законов наиболее распространен нормальный закон распределения, с помощью которого решают различные задачи оптимизации, в том числе и в условиях неопределенности.

Нормальный закон распределения имеет две формы представления: плотность распределения (рис.4 а) и функцию распределения (рис.4 б).

С помощью графика (а) можно определить, например, чему равна вероятность принятия случайной величиной x, изменяющейся в интервале значений A, B (A≤x≤ B), значения не больше величины a, т.е. P(x≤a). Оказывается, эта вероятность равна заштрихованной площади. Зная P(x≤a) можно установить вероятность, что x будет не меньше величины a, т.е. P(x≥a).

Очевидно, что P(x≤a)+P(x≥a)=1 (как сумма несовместных событий), тогда P(x≥a)=1-P(x≤a), что соответствует незаштрихованной площади (рис. 4а).

Большое распространение получила другая форма распределения (потому что площадь криволинейной фигуры трудно вычислить) - функция распределения F(x) (рис. 9.1 б). Здесь вероятность P(x≤a) равна ординате кривой F(x). Следовательно, P(x≤a)=F(a), т.е. P(x≥a)=1-F(a). Для обеспечения расчетов по нормальному закону распределения от реальной случайной величины x переходят к нормированной (центрированной) случайной величине

$$t = (x - \bar{x}) / \sigma_x .$$

При этом P(x≤a)=F(t). Для определения F(t) используют специальные таблицы (табл. 7), по данным которых можно построить график функции распределения.

Таблица 7

t	-3	-2	-1	-0.25	0	0.25	1	2	3
F(t)	0.001	0.02	0.16	0.4	0.5	0.6	0.84	0.98	0.999

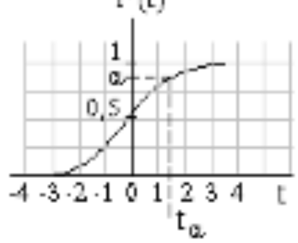


Рис. 5

По графику F(t) (рис.5) можно легко определить интересующие нас величины.

Например, какова вероятность того, что наличный ресурс будет не менее 98.

Очевидно, что $P(x \geq 98)=1-P(x \leq 98)$. Для данного примера $t = (98 - \bar{b}) / \sigma_b$.

Ранее установили, что $\bar{b}=100$; $\sigma_b=9$. Следовательно, $t=(98-100)/9= -0,25$.

Так как $P(x \leq a)=F(t)$; то $P(x \leq 98)=F(-0,25)=0,4$. Тогда

$P(x \geq 98)=1-P(x \leq 98)=1-0,4=0,6$.

Можно поставить и обратную задачу: при каком значении t_α вероятность появления случайной величины удовлетворяла условию $P(t \leq t_\alpha)=\alpha$ -заданный уровень вероятности. Если α задать 0,6, то $t_\alpha=0,25$.

Понятие о стохастическом программировании.

В задаче ЛП:

$$\max(\min)L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j;$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1..m);$$
$$d_j \leq x_j \leq D_j \quad (j = 1..n),$$

заданные величины c_j, a_{ij}, b_i, d_j, D_j. Часто на практике величины c_j, a_{ij}, b_j, могут быть случайными. Так, если b_i - ресурс, то он зависит от ряда факторов. Аналогично, c_j - цены - будут зависеть от спроса и предложения, a_{ij} - расходные коэффициенты - от уровня техники и технологии.

Задачи, в которых c_j, a_{ij}, b_i - случайные величины, относят к задачам стохастического программирования (СТП).

В задачах СТП случайный характер величин указывают различными способами: а) реализацией случайных величин; б) законом распределения случайных величин.

В первом случае (а) в модель подставляют фактические значения случайных величин и решают задачу для этих значений. Такой подход обеспечивает решение задачи оптимизации и получение искомых значений для случая, когда значения реализации случайных величин известны. Такая задача есть обычная задача ЛП. Недостатки такого подхода: 1) необходимость иметь значения реализации случайных величин, что не всегда возможно; 2) невозможно составить план, так как в момент составления плана на предстоящий период конкретных значений реализации случайных величин в принципе быть не может.

Во втором случае (б) по закону распределения случайных величин эти недостатки отсутствуют. Обычно принимают, что случайные величины подчиняются нормальному закону распределения, заданному математическим ожиданием и дисперсией.

Задача СТП предусматривает стохастическую постановку и целевой функции, и ограничений.

Стохастическая постановка ЦФ может быть двух видов: М-постановка и Р-постановка.

При **М**-постановке случайная величина заменяется ее математическим ожиданием и задача сводится к оптимизации детерминированной ЦФ:

$\max(\min)L = \sum_j \bar{c}_j x_j$, где $\bar{c}_j$ - математическое ожидание случайной величины c_j.

При **Р**-постановке ЦФ будет иметь вид:
при максимизации ЦФ

$\max L = P\left[\sum_j c_j x_j \geq r\right]$ обозначает максимизацию вероятности того, что случайная величина $\sum_j c_j x_j$ будет *не меньше* некоторого значения r;

при минимизации ЦФ

$\min L = P\left[\sum_j c_j x_j \le r\right]$ обозначает максимизацию вероятности того, что случайная величина $\sum_j c_j x_j$ будет *не больше* некоторого значения r.

Наиболее распространены СТП-постановки в вероятностных ограничениях вида:

$$P\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i\right] = \begin{cases} \ge \alpha_i; & \text{а)} \\ \le \alpha_i; & \text{б)} \end{cases}$$

$$P\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i\right] = \begin{cases} \ge \alpha_i; & \text{в)} \\ \le \alpha_i; & \text{г)} \end{cases}$$

где a_{ij}, b_i - случайные величины; α_i - заданные уровни вероятности. Так, ограничение (а) означает, что вероятность соблюдения неравенства $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$ должна быть не меньше, чем α_i. Аналогичный смысл и других ограничений.

Для случая, когда вероятностные ограничения представлены в виде типа (а), задачу СТП можно записать:

при **М**-постановке

$$\begin{aligned} &\max(\min) L = \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j; \\ &P\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i\right] \ge \alpha_i \quad (i = 1..m); \quad (*) \\ &d_j \le x_j \le D_j \quad (j = 1..n). \end{aligned}$$

при **Р**-постановке:

в случае максимизации ЦФ

$$\begin{aligned} &\max L = P\left[\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ge r\right]; \\ &P\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i\right] \ge \alpha_i \quad (i = 1..m); \quad (**) \\ &d_j \le x_j \le D_j \quad (j = 1..n). \end{aligned}$$

в случае минимизации ЦФ

$$\begin{aligned} &\min L = P\left[\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le r\right]; \\ &P\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i\right] \ge \alpha_i \quad (i = 1..m); \quad (***) \\ &d_j \le x_j \le D_j \quad (j = 1..n). \end{aligned}$$

где c_j, a_{ij}, b_i - случайные величины.

Для остальных случаев ограничений (б, в, г) постановка задач СТП аналогична.

Задачи (*), (**), (***) непосредственно решены быть не могут. Одним из возможных методов их решения может быть представление их в виде детерминированного эквивалента.

Для решения задачи СТП в Р-постановке и с вероятностными ограничениями переходят к детерминированному эквиваленту.

Для ЦФ детерминированный эквивалент имеет вид:

при минимизации ЦФ при максимизации ЦФ

$$\min L = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - r}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 x_j^2}} \qquad \max L = \frac{r - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 x_j^2}}$$

где σ_j^2- дисперсия случайной величины c_j. Решение таких задач затруднительно, поэтому далее рассматриваем ЦФ только в М-постановке.

Детерминированный эквивалент вероятностного ограничения типа (а) $P\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i\right] \ge \alpha_i$ может быть сведен к виду

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij}\, x_j + t_{\alpha_i} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \theta_i^2} \le \bar{b}_i;$$

где $\bar{a}_{ij}, \bar{b}_i$ - математические ожидания; σ_{ij}^2, θ_i^2 - дисперсии случайных величин a_{ij}, b_i; t_{α_i} $=\Phi^{*-1}(\alpha_i)$ - обратная функция нормального распределения при функции распределения:

$\Phi^*(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-t^2/2}\, dt,$ где α_i - заданный уровень вероятности (табл. 8).

Таблица 8

α_i	0,5	0,6	0,7	0,77	0,84	0,89	0,93	0,96	0,98	0,987	0,994
t_{α_i}	0,0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2,0	2,25	2,5

Обычно решают задачи при $\alpha_i \geq 0,5$; поэтому даны значения t_α только для положительных t_{α_i}.

Если же $\alpha_i<0,5$; то $t_{1-\alpha} = - t_\alpha$. Так для $\alpha=0,4$; $t_{0,4}=t_{(1-0,6)} = -t_{0,6} = -0,25$.

Детерминированный эквивалент задачи СТП в **М**-постановке имеет вид

$$(*)\quad \begin{cases} \max(\min) L = \sum\limits_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} x_j + t_{\alpha_i} \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \theta_i^2} \leq \bar{b}_i; \quad (i = 1..m); \\ d_j \leq x_j \leq D_j \quad (j = 1..n). \end{cases}$$

Из (*) следует, что для решения задачи СТП в М-постановке необходимы исходные данные, приведенные в предыдущей таблице.

Каждое i-е ограничение в детерминированном эквиваленте (*) отличается от аналогичного ограничения задачи ЛП $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$ следующим:

1. от детерминированных значений a_{ij}, b_i выполнен переход к математическим ожиданиям случайных величин $\bar{a}_{ij}, \bar{b}_i$;
2. появился дополнительный член (кси) $\xi_i = t_{\alpha_i} \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \theta_i^2}$, который учитывает все вероятностные факторы: закон распределения с помощью $t_{\alpha i}$; заданный уровень вероятности α_i; дисперсии случайных величин a_{ij}, равные σ_{ij}^2; дисперсии случайных величин b_i, равные θ_i^2.

Решение задач СТП. Детерминированный эквивалент задачи СТП в **М**-постановке включает ограничения, которые являются несепарабельными функциями.

Обозначим $T_i = \sqrt{\sum_j \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \theta_i^2}$, тогда задачу СТП можно записать в сепарабильной форме:

$$
\begin{aligned}
&\max(\min)L = \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j; \\
&\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} x_j + t_{\alpha_i} T_i \le \bar{b}_i \quad (i = 1..m); \\
&T_i^2 - (\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \theta_i^2) = 0 \quad (j = 1..n); \\
&d_j \le x_j \le D_j \quad (j = 1..n); \\
&\underline{T}_i \le T_i \le \overline{T}_i \quad (i = 1..m).
\end{aligned}
$$

где $\underline{T}_i = \sqrt{\sum_j \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \theta_i^2}$; $\overline{T_i} = \sqrt{\sum_j \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \theta_i^2}$.

Эта задача является сепарабильной задачей нелинейного программирования и может быть решена с помощью стандартных программных средств ППК.

Функция $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется сепарабильной, если она может быть представлена в виде суммы функций, каждая из которых является функцией одной переменной, т.е. если $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_j f_i(x_i)$.

Вывод. Если ЦФ и функции в системе ограничений задачи НЛП сепарабильные, то приближенное решение может быть найдено методом кусочно-линейной аппроксимации.

Пример 6. Рассмотрим задачу распределения двух видов ресурсов для выпуска двух наименований изделий.

Решение:

Ее модель:

$$\max L = c_1x_1 + c_2x_2;$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1;$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2;$$

$$d_1 \le x_1 \le D_1;$$

$$d_2 \le x_2 \le D_2,$$

где a_{ij}, b_i, c_j - случайные.

При **М**-постановке модель запишется:

$$\max L = M\,[c_1x_1 + c_2x_2];$$

$$P(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1) \ge \alpha_1;$$

$$P(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2) \ge \alpha_2;$$

$$d_1 \le x_1 \le D_1;$$

$$d_2 \le x_2 \le D_2,$$

α_1, α_2 - заданные уровни вероятности соблюдения каждого ограничения.

Для того, чтобы решить задачу в М-постановке необходимо перейти к ее детерминированному эквиваленту:

$$\begin{cases} \max L = \bar{c}_1\bar{x}_1 + \bar{c}_2\bar{x}_2; \\ \bar{a}_{11}x_1 + \bar{a}_{12}x_2 \le \bar{b}_1 - t_{\alpha_1}\sqrt{\sigma_{11}^2x_1^2 + \sigma_{12}^2x_2^2 + \theta_1^2}; \\ \bar{a}_{21}x_1 + \bar{a}_{22}x_2 \le \bar{b}_2 - t_{\alpha_2}\sqrt{\sigma_{21}^2x_2^2 + \sigma_{22}^2x_2^2 + \theta_2^2}; \\ d_1 \le x_1 \le D_1; \quad d_2 \le x_2 \le D_2. \end{cases}$$

Исходные данные, необходимые для решения этой задачи, сведены в табл. 9.1 и 9.2.

Таблица 9.1

Величина	c	d	D
x_1	5	2	6
x_2	8	3	9

Таблица 9.2

Ограничения	Случайные величины					
	a_{i1}		a_{i2}		b_i	
	$\bar{a}_{i1}$	σ_{i1}	$\bar{a}_{i2}$	σ_{i2}	$\bar{b}_i$	θ_i
1	10	2	15	3	100	9
2	20	6	14	4	150	12

Если задать уровни вероятности $\alpha_{1,2}$=0,6, для которых t_α=0,25, то получим после подстановки исходных данных детерминированный эквивалент:

Таблица 9.3

$$\begin{cases} \max L = 5x_1 + 8x_2 \\ 10x_1 + 15x_2 \le 100 - 0{,}25\sqrt{4x_1^2 + 9x_2^2 + 81} \\ 20x_1 + 14x_2 \le 150 - 0{,}25\sqrt{36x_1^2 + 16x_2^2 + 120} \\ 2 \le x_1 \le 6; 3 \le x_2 \le 9. \end{cases}$$

Величина	$\xi_i=0$	$\alpha_i=0{,}6$
x_1	2	2
x_2	5,3	5,04
L	52,4	50,3
β	0	4
ξ_1	0	4,4

Результаты решения этой задачи для детерминированного случая $\xi_i=0$ и при $\alpha_i=0{,}6$ (табл. 9.3), где $\xi_i = t_{\alpha_i}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}^2 x_j^2 + \theta_i^2}$.

Рассмотрим теперь, как повлияют на результат решения задачи величины, определяющие ее вероятностный характер. К таким величинам относят: заданный уровень вероятности α_i и дисперсий σ_{ij}^2 и θ_i^2. Начнем с анализа влияния α_i (табл. 10).

Из анализа этой решения этой задачи можно сделать следующие выводы: для обеспечения гарантированного (с вероятностью $\alpha=0{,}6$) выполнения плана необходимо иметь дополнительно ~5% каждого вида ресурса. При отсутствии дополнительного ресурса ЦФ может уменьшиться на величину $\beta=4\%$ вследствие возможного сокращения выпуска продукции x_2 от 5,3 до 5,04.

Таблица 10

Величина	$\alpha_{1,2}$					
	0,5	0,6	0,77	0,89	0,96	0,987
x_1	2	2	2	3,71	3,07	2,165
x_2	5,3	5,04	4,51	3	3	3
L	52,4	50,3	46,1	42,6	39,3	34,8
β	0	4	12	18,7	25	33,6
γ_1	0	4,4	12,3	17,9	24,3	33,3
γ_2	0	5,1	14,8	16,5	23,2	26

Этот пример подтверждает тот факт, что в реальных условиях для гарантированного выполнения плана необходимы дополнительные ресурсы в размере ξ_i. В противном случае возможно уменьшение выпуска продукции.

При этом можно сделать выводы:

1. В целях повышения заданного уровня вероятности выполнения плана α_i требуется увеличить дополнительные ресурсы γ_i. Так, для выполнения плана с вероятностью близкой к 1 (α=0,987), необходим дополнительный ресурс в размере γ=26...33% от величины используемого без учета вероятностных характеристик.
2. Отсутствие такого увеличения может привести к ухудшению ЦФ на величину β=33,6%.
3. Возрастание α отражается на номенклатуре продукции. При этом в интервале α=0,5...0,77 значение x_1 сохраняется неизменным, а x_2 - уменьшается. При дальнейшем увеличении α=0,89...0,987 значение x_2=const, в то время как x_1 сначала скачком растет, а затем постепенно уменьшается. Несмотря на то, что при α=0,89 значения x_1, x_2 резко изменяются, ЦФ во всем интервале изменения α уменьшается плавно. Таково влияние заданного уровня вероятности соблюдения ограничений α на результат решения задачи.

Для большей реальности и выполнимости планов элементы модели должны постоянно уточняться по фактическим реализациям случайных величин.

4. **Задачи теории игр**

При управлении производством принимать решения очень часто приходится не имея достаточной информации, т.е. в условиях неопределенности и риска.

Методами обоснования решений в условиях неопределенности и риска занимается математическая теория игр.

В теории игр рассматриваются такие ситуации, когда имеются два участника выполнения операции, каждый из которых преследует противоположные цели. В качестве участников могут выступать коллективы, конкурирующие предприятия и т.д. Во всех случаях предполагается, что операция проводится против разумного противника (конкурента), преследующего свои собственные цели и сознательно противодействующего достижению цели другим участником.

Так как цели противоположны, а результат мероприятия каждой из сторон зависит от действий конкурента, то эти действия называют конфликтными ситуациями. В конфликтной ситуации сталкиваются противоположные интересы двух участникам. Формализованная (схематизированная) модель конфликтной ситуации называется игрой. Результат игры - победа или поражение, которые не всегда имеют количественное выражение, можно выразить (условно) числами (например, в шахматах: 1, 0, $^1/_2$).

Игра называется игрой с нулевой суммой, если один из игроков выигрывает ровно столько, сколько проигрывает другой.

Развитие игры во времени представляется как ряд последовательных «ходов». Ходы могут быть сознательные и случайные. Случайный ход - результат, получаемый не решением игрока, а каким-либо механизмом случайного выбора (покупательский спрос, задержка с поставкой материалов и т.п.). Сознательный ход - выбор игроком одного из возможных вариантов действия (стратегии) и принятие решения об его осуществлении.

Возможные варианты (исходы) игры сводятся в прямоугольную таблицу (табл. 11.1) - платежную матрицу, в которой строки соответствуют различным стратегиям игрока А, столбцы - стратегиям игрока В, q_{ij} называется ценой игры.

Таблица 11.1

	B_1	B_2	...	B_n
A_1	q_{11}	q_{12}	...	q_{1n}
A_2	q_{21}	q_{22}	...	q_{2n}
...	...	...	...	...
A_m	q_{m1}	q_{m2}	...	q_{mn}

Цель теории игр - выработка рекомендаций для различного поведения игроков в конфликтной ситуации, т.е. выбор оптимальной стратегии для каждого из них.

Для нахождения оптимальной стратегии необходимо проанализировать все возможные стратегии и рассчитывать на то, что разумный противник каждую из них будет отвечать такой, при которой выигрыш игрока А минимален. Обычно минимальные числа в каждой строке обозначаются α_i и выписываются в виде добавочного столбца матрицы (табл. 11.2).

Таблица 11.2

	B_1	B_2	...	B_n	α_i
A_1	q_{11}	q_{12}	...	q_{1n}	α_1
A_2	q_{21}	q_{22}	...	q_{2n}	α_2
...	...	...	...	...	...
A_m	q_{m1}	q_{m2}	...	q_{mn}	α_i
β_i	β_1	β_2	...	β_n	

В каждой строке будет свое $\alpha_i = \min_j q_{ij}$.

Предпочтительной для игрока А является стратегия, при которой α_i обращается в максимум, т.е. $\alpha = \max_i \alpha_i$ или $\alpha = \max_i \min_j q_{ij}$, где α - максиминный выигрыш (максимин), а соответствующая ей стратегия - максиминная.

Если придерживаться максиминной стратегии, то при любом поведении стороны В (конкурента) гарантирован выигрыш, во всяком случае не меньше α. Поэтому α называют также ценой игры - тот гарантированный минимум, который можно обеспечить при наиболее осторожной (перестраховочной) стратегии.

Очевидно, что аналогичные распределения можно провести и для конкурента В, который должен рассмотреть все свои стратегии, выделяя для каждой из них максимальные значения выигрыша: $\beta_j = \max_i q_{ij}$ (последняя строка матрицы). Из всех значений β_j находят минимальное: $\beta = \min\limits_j \max\limits_i q_{ij}$, которое дает минимаксный выигрыш или минимакс.

Такая β-стратегия - минимаксная, придерживаясь которой сторона В гарантирована, что в любом случае проиграет не больше β. Поэтому β называют верхней ценой игры.

Если $\alpha=\beta=C$, то число С называют чистой ценой игры или седловой точкой. Для игры с седловой точкой нахождение решения состоит в выборе пары максиминной и минимаксной стратегий, которые являются оптимальными, так как любое отклонение от этих стратегий приводит к уменьшению выигрыша первого игрока и увеличению проигрыша второго игрока по сравнению с ценой игры С.

Пример 7. Конструктор получил задание разработать определенное новое изделие. В результате исследований он определил три возможных варианта изделия V_1, V_2, V_3, каждый из которых может быть реализован каким-либо из трех техпроцессов T_1, T_2, T_3.

Если первый вариант конструкции V_1 реализуется по первой технологии T_1, то внешний вид изделия оказывается наилучшим и оценивается экспертами в 9 баллов, а при реализации по второй технологии - в 6 баллов, по третьей - в 5 баллов и т.д. (табл. 12).

Таблица 12. Матрица игры для конструктивного и технологического вариантов

Конструкция	Технология			$\alpha_i = \min\limits_j q_{ij}$.
	T_1	T_2	T_3	
V_1	9	6	5	5 (T_3)
V_2	8	$\underline{7}$	7	$\underline{7}$ (T_2 или T_3)
V_3	7	5	8	5 (T_2)
$\beta_j = \max\limits_i q_{ij}$	9	$\underline{7}$	8	$\max\limits_i \min\limits_j q_{ij} = 7 = \min\limits_j \max\limits_i q_{ij}$

Решение:

Конфликтная ситуация возникает из-за того, что затраты на реализацию каждого конструкторско-технологического решения (варианта) не одинаковы. Для простоты полагаем, что затраты пропорциональны внешнему виду (чем выше балл, тем больше затраты).

Конструктор должен представить только один вариант, конечно самый красивый. Но он понимает, что тогда найдутся сторонники самого дешевого варианта («экономисты»). Поэтому его задача выбрать оптимальный вариант по внешнему виду и стоимости.

Если конструктор выберет V_1, то экономисты будут настаивать на технологии T_3. На вариант V_2 будет ответ T_2 или T_3 и т.д.

Очевидно, что с точки зрения конструктора преимущество имеет вариант V_2, а так как даже при неблагоприятных обстоятельствах получится изделие, оцениваемое в 7 баллов (выигрыш 7), а может быть даже 8, если удается уговорить экономистов на вариант T_1.

С точки зрения экономистов в смысле снижения затрат: при выборе технологии T_1 в варианте V_1 затраты наибольшие - 9 баллов, при T_2 в V_2 (7), при T_3 в V_3 (8). Т.е. для экономистов оптимальным является техпроцесс T_2, так как он требует меньших затрат при различных вариантах конструкции. Следовательно, стратегия T_2V_2 с выигрышем 7 - наиболее выгодная сразу для обеих сторон - максимальный выигрыш V совпадает с минимальным проигрышем T.

Однако не все матрицы имеют седловую точку. Тогда решение находят, применяя смешанные стратегии, т.е. чередуя случайным образом несколько чистых стратегий (гибкая тактика).

Вектор, каждая из компонент которого показывает относительную частоту использования игроком соответствующей чистой стратегии, называют смешанной стратегией данного игрока.

Из этого определения следует, что сумма компонент этого вектора равна единице, а сами компоненты не отрицательны.

Обычно смешанную стратегию первого игрока обозначают как вектор $U=(u_1, u_2, \dots, u_m)$, а второго игрока - как вектор $Z=(z_1, z_2, \dots, z_m)$, где $u_i \geq 0$ $(i=1..m)$, $z_j \geq 0$ $(j=1..n)$, $\sum_{i=1}^{m} u_i = \sum_{j=1}^{n} z_j = 1.$

Если u^0 - оптимальная стратегия первого игрока, z^0 - оптимальная стратегия второго игрока, то число $\upsilon = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i^0 z_j^0$ - называют ценой игры.

Для того чтобы число υ - было ценой игры, а u^0 и z^0 - оптимальными стратегиями, необходимо и достаточно выполнение неравенств:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i^0 \geq \upsilon \quad (j = 1..n),$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j^0 \leq \upsilon \quad (i = 1..m).$$

Если один из игроков применяет оптимальную смешанную стратегию, то его выигрыш равен цене игры υ вне зависимости от того, с какими частотами будет применять второй игрок стратегии, вошедшие в оптимальную, в том числе и чистые стратегии.

Пример 8. Найти решение игры, заданной матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Прежде всего проверяется наличие седловой точки. Для этого определяются минимальные элементы в каждой из строк (2 и 4) и максимальные элементы в каждом из столбцов (6 и 5).

Значит, нижняя цена игры $\alpha = \max_i(\min_j a_{ij})$=max(2; 4)=4, верхняя цена игры

$\beta = \min_i(\max_j a_{ij})$=min (6; 5)=5.

Так как $\alpha = 4 \neq \beta = 5$, то решение игры - смешанные оптимальные стратегии, а цена игры υ в пределах $4 \leq \upsilon \leq 5$.

Пусть для игрока А стратегия задается вектором $U=(u_1, u_2)$. Тогда при применении игроком В чистой стратегии B_1 или B_2 игрок А получит средний выигрыш, равный цене игры, т.е.

$$\begin{cases} 2u_1^0 + 6u_2^0 = \upsilon & \text{(при стратегии } B_1\text{)}, \\ 5u_1^0 + 4u_2^0 = \upsilon & \text{(при стратегии } B_2\text{)}, \\ u_1^0 + u_2^0 = 1 & \text{(уравнение связи астот } u_1^0,\ u_2^0\text{)}. \end{cases}$$

Из решения трех уравнений с тремя неизвестными оптимальная стратегия игрока А: $u_1^0 = {}^2/_5$; $u_2^0 = {}^3/_5$; $\upsilon = {}^{22}/_5$.

Пусть для игрока В стратегия задается вектором $Z=(z_1, z_2)$. Тогда

$$\begin{cases} 2u_1^0 + 6u_2^0 = {}^{22}\!/_5, \\ 5u_1^0 + 4u_2^0 = {}^{22}\!/_5, \\ u_1^0 + u_2^0 = 1. \end{cases}$$

Отсюда оптимальная стратегия игрока В: $z_1^0 = {}^1/_5$; $z_2^0 = {}^4/_5$.

Следовательно, решением игры будут смешанные стратегии $u^0=({}^2/_5;\ {}^3/_5)$, $z^0=({}^1/_5;\ {}^4/_5)$ с ценой игры $\upsilon = {}^{22}/_5$.

Оценка риска в «играх с природой». В случае, когда между сторонами (участниками) отсутствует «антагонизм» (например, в процессе работы предприятий и торговых посредников), такие ситуации называют «играми с природой».

Здесь первая сторона принимает решение, а вторая сторона - «природа» не оказывает первой стороне сознательного, агрессивного противодействия, но ее реальное поведение неизвестно.

Пусть торговое предприятие имеет m стратегий: $T_1, T_2, \dots, T_m$ и имеется n возможных состояний природы: $П_1, П_2, \dots, П_n$. Так как природа не является заинтересованной стороной, исход любого сочетания поведения сторон можно оценить выигрышем b_{ij} первой стороны для каждой пары стратегий T_i и $П_j$. Все показатели игры заданы платежной матрицей $\{b_{ij}\}_{mxn}$..

По платежной матрице можно принять ряд решений. Например, оценить возможные исходы: минимальный выигрыш $B_i^{min} = \min_j B_{ij}$, т.е. наименьшая из величин в каждой i-й строке как пессимистическая оценка; максимальный выигрыш - то наилучшее, что дает выбор i-го варианта $B_i^{max} = \max_j B_{ij}$.

При анализе «игры с природой» вводится показатель, по которому оценивают, насколько то или иное состояние «природы» влияет на исход ситуации. Этот показатель называют риском.

Риск r_{ij} при пользовании стратегией T_i и состоянии «природы» $П_j$ оценивается разностью между максимально возможным выигрышем при данном состоянии «природы» B_i^{max} и выигрышем B_{ij} при выбранной стратегии T_i:

$r_{ij}=B_i^{max} - B_{ij}$.

Исходя из этого определения можно оценить максимальный риск каждого решения: $r_i^{max} = \max_j r_{ij}$.

Решения могут приниматься по результатам анализа ряда критериев.

1) Критерий, основанный на известных вероятностных состояниях «природы» (например, спроса по данным анализа за прошлые годы):

- *если известны вероятности состояний «природы»:*

$P_1=P(П_1);P_2=P(П_2);...;P_n=P(П_n)$, полагая, что $P_1+P_2+...+P_j+...+P_n=1$. Тогда в качестве показателя эффективности (рациональности, обоснованности) стратегии T_i берется среднее (математическое ожидание) - выигрыш применения этой стратегии: $\overline{B}_i = \sum_{j=1}^{n} B_{ij}P_j$, а оптимальной считают стратегию, для которой этот показатель эффективности имеет максимальное значение, т.е. $\overline{B} = \max_i \overline{B}_i$.

- *если каждому решению T_i соответствует множество возможных результатов B_{ij} с вероятностями P_{ij},* то среднее значение выигрыша определится $\overline{B}_i = \sum_{j=1}^{n} B_{ij}P_{ij}$, а оптимальная стратегия выбирается по условию $\overline{B} = \max_i \overline{B}_i$.

В этом случае можно воспользоваться и стратегией минимального среднего риска для каждого i-го состояния «природы» $\bar{r} = \min_i \bar{r}_i = \min_i \sum_{j=1}^{n} r_{ij} P_{ij}$.

2) Максиминный критерий Вальда. Здесь выбирается решение торговой организации, при котором гарантируется максимальный выигрыш в наихудших условиях внешней среды (состояния «природы»):

$$W = \max_i \min_j B_{ij} = \max_i B_i^{\min}.$$

3) Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица. Здесь представляется логичным, чтобы при выборе решения вместо двух крайностей в оценке ситуации (оптимум-пессимизм) придерживаться некоторого компромисса, учитывающего возможность как наихудшего, так и наилучшего поведения «природы». В соответствии с этим компромиссным критерием для каждого решения будет линейная комбинация минимального и максимального выигрышей и выбирается тот, для которого эта величина окажется наибольшей:

$$G = \max_i [x \min_j B_{ij} + (1 - x) \max B_{ij}],$$

где x - показатель пессимизма-оптимизма (чаще всего 0.5).

4) Критерий минимаксного риска Сэвиджа. Здесь выбирают ту стратегию, при которой величина риска имеет минимальное значение в самой неблагоприятной ситуации: $S = \min_i \max_j r_{ij}$, чтобы избежать слишком большого риска при выборе решения.

Комплексный анализ всех этих критериев позволяет в какой-то мере ценить возможные последствия принимаемых решений.

Пример 9.

Известна матрица условных вероятностей P_{ij} продажи старых товаров C_1, C_2, C_3 при наличии новых товаров H_1, H_2, H_3 (табл. 13). Определить наиболее выигрышную политику продаж.

Решение:

Таблица 13. Платежная матрица $\{b_{ij}^{\ p_{ij}}\}_{mxn}$

Старые товары	Новые товары		
	H_1	H_2	H_3
C_1	$9^{0.6}$	$6^{0.3}$	$4^{0.6}$
C_2	$8^{0.2}$	$3^{0.7}$	$7^{0.2}$
C_3	$5^{0.1}$	$5^{0.4}$	$8^{0.5}$

Минимальный выигрыш $B_i^{min} = \min\limits_j B_{ij}$.

Минимальный выигрыш при продаже старого товара

- C_1: $B_1^{min} = \min\limits_{j=1..3}\{B_{11}, B_{12}, B_{13}\} = \min\{9,6,4\} = 4 = B_{13}$.
- C_2: $B_2^{min} = \min\{8,3,7\} = 3 = B_{22}$.
- C_3: $B_3^{min} = \min\{5,5,8\} = 5 = B_{31}$,

где B_{12}, B_{22}, B_{31} образуют систему пессимистических оценок выигрыша от продаж старых товаров.

Максимальный выигрыш при продаже старых товаров:

- C_1: $B_1^{max} = \max\limits_{j=1..3}\{B_{11}, B_{12}, B_{13}\} = 9 = B_{11}$.
- C_2: $B_2^{max} = \max\limits_{j=1..3}\{B_{21}, B_{22}, B_{23}\} = 8 = B_{21}$.
- C_3: $B_3^{max} = \max\{5,5,8\} = 8 = B_{33}$,

где B_{11}, B_{21}, B_{33} образуют систему оптимистических оценок выигрыша от продаж старых товаров.

При анализе «игры с природой» вводится показатель влияния какого-либо состояния «природы» на исход продаж, т.е. показатель риска: $r_{ij}=B_i^{max}-B_{ij}$, каждый из которых составит матрицу рисков (табл. 14).

Таблица 14. Матрица рисков

	H_1	H_2	H_3
C_1	0	3	5
C_2	0	5	1
C_3	3	3	0

Максимальное значение риска для каждого решения: $r_i^{max} = \max\limits_j r_{ij}$, т.е. при продаже товаров:

- C_1: $r_1^{max} = \max\limits_{j=1..3}\{r_{11}, r_{12}, r_{13}\} = \max\{0,3,5\} = 5 = r_{13}$.
- C_2: $r_2^{max} = \max\{0,5,1\} = 5 = r_{22}$.
- C_3: $r_3^{max} = \max\{3,3,0\} = 3 = r_{31}$.

Решения о плане продаж принимается исходя из анализа системы критериев.

Критерий по известным вероятностным состояниям «природы» P_{ij}: оптимальной считают стратегию, для которой этот показатель наибольший, т.е.

$\overline{B} = \max\limits_i \overline{B}_i$, где $\overline{B}_i$ - математическое ожидание выигрыша при i-й стратегии:

$\overline{B}_i = \sum\limits_{j=1}^{3} B_{ij}P_{ij}$, где B_{ij} - результат (выигрыш при применении ij-й стратегии):

$\overline{B}_1$=9· 0.6+6· 0.3+4· 0.1=7.6;

$\overline{B}_2$=8· 0.2+3· 0.7+7· 0.1=4.4;

$\overline{B}_3$=5· 0.1+5· 0.4+8· 0.5=6.5.

Тогда $\overline{B} = \max\limits_i\{B_i\} = \max\{7.6;4.4;6.5\} = 7.6 = \overline{B}_1$, т.е. оптимальной стратегией по этому критерию будет продажа изделия C_1.

Максиминный критерий Вальда:

$W = \max\limits_i \min\limits_j B_{ij} = \max\limits_i B_i^{min}$.

$W = \max\limits_i\{B_1^{min}, B_2^{min}, B_3^{min}\} = \max\{6,3,5\} = 6 = B_1^{min}$, т.е. при продаже изделия C_1 гарантируется выигрыш даже в наихудших условиях.

Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица:

$G = \max\limits_i[xB_i^{min} + (1-x)B_i^{max}]$, где x - доля оптимизма- пессимизма (0,5).

$G = \max\limits_i [0.5\{6,3,5\}+0.5\{9,8,8\}]=\max\{(3+4.5);(1.5+4);(2.5+4)\}=\max\{7.5;5.5;6.5\}=7.5$,

т.е. исходя из уравновешенной точки зрения принимается решение о продажах C_1.

Критерий минимаксного риска Сэвиджа, по которому принимают решение минимальным значением риска в самой неблагоприятной ситуации:

$S = \min\limits_i \max\limits_j r_{ij} = \min\limits_i r_i^{max}$, где r_i^{max} вычислена по матрице рисков.

$S = \min\limits_i \{r_1^{max}, r_2^{max}, r_3^{max}\} = \min\{5{,}5{,}3\} = 3$, что соответствует целесообразности в смысле этого критерия продажам изделия C_3.

Комплексный анализ всех критериев позволяет предположить, что наилучшей стратегией продаж будет продажа изделий H_1, H_2, H_3, C_1, C_3. Изделие C_2 должно быть снято с продаж.

5. **Геометрическая интерпретация игровых задач**

Пример 10. Решить игру, заданную матрицей $A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} A_1 \\ A_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \end{array}$

Решение:

На плоскости UOZ вводится система координат OZ и OU. На оси OU Откладывается отрезок единичной длины A_1A_2, каждой точке которого ставится в соответствие некоторая смешанная стратегия $U=(u_1, u_2)=(u_1,1-u_1)$ (рис.6). Например, точке $A_1(0; 1)$ соответствует стратегия A_1, точке $A_2(1; 0)$ - стратегия A_2 и т.д.

В точках A_1, A_2 восстанавливаются перпендикуляры, на которых откладываются выигрыши игроков. На первом перпендикуляре (совпадающем с осью OZ) откладывается выигрыш игрока А при стратегии A_1, на втором - при стратегии - A_2.

Если игрок А применяет стратегию A_1, то его выигрыш при стратегии B_1 игрока В равен 2, а при стратегии B_2 он равен 5 (точки B_1 и B_2 на оси OZ).

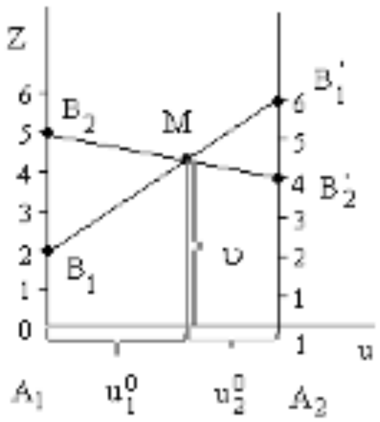


Рис. 6

Если игрок А применяет стратегию A_2, то его выигрыш при стратегии B_1 игрока В равен 6, а при стратегии B_2 он равен 4 (точки B_1' и B_2' на перпендикуляре из точки A_2).

Соединяя между собой точки B_1 и B_1', B_2 и B_2', получим две прямые, расстояние до которых от оси OU определяет средний выигрыш при любом сочетании соответствующих стратегий. Например, расстояние от любой точки отрезка B_1B_1' до оси OU определяет средний выигрыш v_1 при любом сочетании стратегий A_1 и A_2 (с частотами u_1 и u_2) и стратегии B_1 игрока B. Это расстояние равно $2u_1 + 6u_2 = v_1$. Аналогично, средний выигрыш при стратегии B_2 определяется ординатами точек отрезка B_2B_2'.

Таким образом, ординаты точек, принадлежащих ломаной B_1MB_2' определяют минимальный выигрыш игрока A при применении им любых смешанных стратегий. Эта минимальная величина ($\min\limits_j a_{ij}$) является максимальной в точке M ($\max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$). Следовательно, этой точке соответствует оптимальная стратегия $u^0 = (u_1^0, u_2^0)$, а ее ордината равна цене игры υ. Координаты точки M находятся как координаты точки пересечения прямых B_1B_1' и B_2B_2':

$$\begin{cases} 2u_1^0 + 6u_2^0 = \upsilon, \\ 5u_1^0 + 4u_2^0 = \upsilon, \\ u_1^0 + u_2^0 = 1. \end{cases}$$

Решение этих уравнений: $u_1^0 = 2/5; u_2^0 = 3/5; \upsilon = 22{,}5.$

Аналогично определяется оптимальная стратегия для игрока B из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 2z_1^0 + 5z_2^0 = 22/5, \\ z_1^0 + z_2^0 = 1. \end{cases} \quad \text{или } z_1^0 = 1/5; z_2^0 = 4/5.$$

Решение игры - смешанные стратегии $u^0=(2/5;\ 3/5)$, $z^0=(1/5;\ 4/5)$, $\upsilon=22/5$.

Обобщая решение игровых задач размерностью 2xn и nx2, можно выделить этапы:

1. строят прямые, соответствующие стратегиям второго (первого) игрока;
2. определяют нижнюю границу (верхнюю) выигрыша;

3. находят две стратегии второго (первого) игрока, которым соответствуют две прямые, пересекающиеся в точке с минимальной (максимальной) ординатой.
4. определяют цену игры и оптимальные стратегии.

Пример 11.

Решить игру, заданную матрицей $A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 10 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

Решение: Строим прямые - стратегии второго игрока

B_1B_1', B_2B_2', B_3B_3' (рис.7).

Ломаная B_1MB_2' соответствует нижней границе выигрыша игрока B, т.е. $z_1^0 = 1/3; z_2^0 = 2/3; \upsilon = 8$. В точке M с минимальной ординатой пересекаются прямые B_1B_1', B_2B_2', которым соответствуют стратегии игрока A:

$$\begin{cases} 7u_1 + 9u_2 = \upsilon \\ u_1 + u_2 = 1, \quad \text{т.е. } u_1^0 = u_2^0 = 1/2. \end{cases}$$

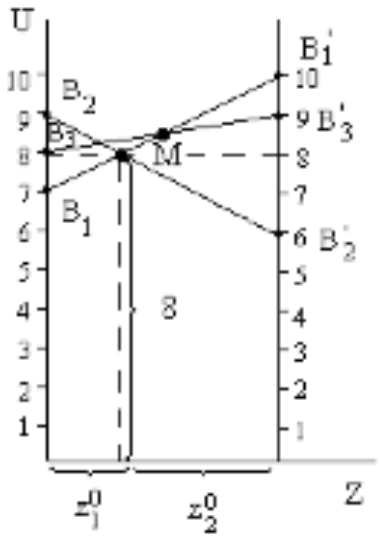


Рис. 7

Следовательно, решение игры: $u^0=(1/2;\ 1/2;\ 0)$, $z^0=(1/3;\ 2/3)$, цена игры $\upsilon=8$.

Пример 12.

Решить игру, заданную матрицей $A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 10 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

Решение:

Строим прямые - стратегии первого игрока (рис.8).

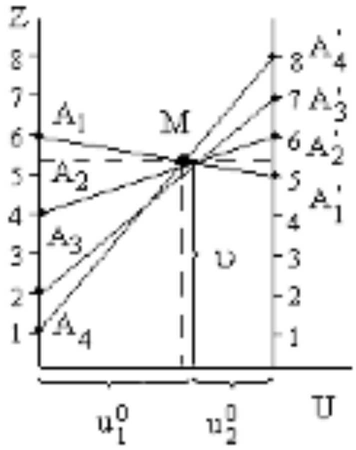


Рис. 8

Ломаная A_1MA_4' соответствует верхней границе выигрыша игрока А, а ордината точки М - цене игры. Стратегии A_1 и A_4' первого игрока соответствуют прямые A_1A_1' и A_4A_4', пересекающиеся в точке М с максимальной ординатой, т.е.

$$\begin{cases} 6u_1 + 4u_4 = \upsilon, \\ 5u_1 + 8u_4 = \upsilon, \\ u_1 + u_2 = 1, \quad \text{т.е. } u_1^0 = 7/8; u_4^0 = 1/8, \upsilon = 43/8. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 6z_1 + 5z_2 = \upsilon = 43/8, \\ z_1 + z_2 = 1, \quad \text{т.е. } z_1^0 = 3/8; z_2^0 = 5/8. \end{cases}$$

Следовательно, решение игры: $u^0=(^7/_8;\ 0;\ 0;\ ^1/_8)$, $z^0=(^3/_8;\ ^5/_8)$, $\upsilon={}^{43}/_8$.

Пример 13. Пусть предприятие планирует на массовый рынок производство нового изделия. Спрос на это изделие не может быть точно определен. Однако можно предположить, что его величина будет характеризоваться тремя возможными состояниями (I, II, III). С учетом этих состояний анализируются три возможных варианта (модификации) конструкции изделия (А, Б, В), каждый из которых требует своих затрат и обеспечивает различный эффект (цену, прибыль).

Прибыль, которую получит предприятие при данном объеме производства и соответствующем состоянии спроса, определяется матрицей:

$$\begin{array}{c} \\ А \\ Б \\ В \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 22 & 22 & 22 \\ 21 & 23 & 23 \\ 20 & 21 & 24 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Требуется выбрать такой вариант изделия, величина предложения которого обеспечит среднюю прибыль при любом уровне спроса.

Решение:

Прежде всего проверяется имеет ли исходная платежная матрица седловую точку.

$\alpha = \max\limits_i(\min\limits_j a_{ij})$=max(22, 21, 20)=22 - нижняя цена.

$\beta = \min\limits_j(\max\limits_i a_{ij})$=min(22, 23, 24)=22 - верхняя цена игры, т.е. $\alpha=\beta=22$ - цена игры (седловая точка).

Таким образом, оптимальная политика предприятия на рынке - производство первой модификации изделия в объеме, обеспечивающем среднюю прибыль 22 д.е. при любом состоянии спроса.

Пример 14. Предприятие планирует производство двух изделий А, Б с неопределенным спросом, предполагаемый уровень которого характеризуется двумя состояниями I, II. В зависимости от этих состояний прибыль предприятия различна и определяется платежной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 52 & 22 \\ 22 & 49 \end{pmatrix}.$$

Определить объемы производства каждого изделия, при котором предприятию гарантируется средняя величина при любом состоянии спроса.

Решение: Проверка платежной матрицы на наличие седловой точки:

$\alpha = \max\limits_i(\min\limits_j a_{ij})$=max(22, 22)=22 - нижняя цена.

$$\beta = \min_j(\max_i a_{ij})=\min(52, 49)=49 \text{ - верхняя цена.}$$

Следовательно, чистых стратегий продаж у предприятия нет, и для игры без седловой точки ($\alpha<\beta$) используют смешанные стратегии:

$$\begin{cases} 52u_1 + 22u_2 = \upsilon, \\ 22u_1 + 49u_2 = \upsilon, \\ u_1 + u_2 = 1, \quad \text{т.е. } u_1 = {}^9\!/_{19} = 0{,}47; u_2 = 0{,}53; \upsilon = 36{,}1. \end{cases}$$

Следовательно, в общем объеме предложения предприятия 53% должны составлять изделия Б, 47% - изделия А. Такая стратегия продаж обеспечит среднюю прибыль 36,1 д.е. при любом состоянии спроса.

Сведение задач теории игр к задачам ЛП.

Пусть задана платежная матрица игры $A_{mxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$. Для оптимальной стратегии первого игрока $u^0 = (u_1^0, u_2^0, \dots, u_m^0)$ и цены игры υ выполняется неравенство $\sum_{i=1}^m a_{ij}u_i^0 \ge \upsilon \ (j = 1..n)$, или (разделив на υ) $\sum_{i=1}^m a_{ij}\frac{u_i^0}{\upsilon} \ge 1 \ (j = 1..n)$, обозначая $\frac{u_i^0}{\upsilon} = y_i^0$, получим:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i^0 \ge 1 \ (j = 1..n), \\ y_i^0 \ge 1 \ (i = 1..m; \upsilon > 0), \\ \qquad \sum_{i=1}^m y_i^0 = \frac{1}{\upsilon}. \end{cases}$$

Так как первый игрок стремится получить максимальный выигрыш, то он должен обеспечить минимум величине ${}^1\!/_\upsilon$. Ñ учетом этого определение оптимальной стратегии сводится к нахождению минимума функции $L_1 = \sum_{i=1}^{m} y_i$ при условиях $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge 1$ (j=1..n); $y_i \ge 0$ (i=1..m).

Аналогично определение оптимальной стратегии второго игрока сводится к нахождению максимума функции $L_2 = \sum_{j=1}^{n} x_j$ при условиях

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le 1$ (i=1..m); $x_j \ge 0$ (j=1..n), где = z_j / υ.

Таким образом, чтобы найти решение данной игры по матрице A, нужно составить следующую пару двойственных задач и найти их решение.

Прямая задача

$$\begin{cases} \max L = \sum_{j=1}^{n} x_j; \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le 1 \quad (i = 1..m); \\ x_j \ge 0 \quad (j = 1..n). \end{cases}$$

Двойственная задача

$$\begin{cases} \min L = \sum_{i=1}^{m} y_i; \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge 1 \quad (j = 1..n); \\ y_i \ge 0 \quad (i = 1..m). \end{cases}$$

Используя решения пары задач, можно выявить оптимальные стратегии и цену игры:

$$u_i^0 = \frac{y_i^0}{\sum_{i=1}^{m} y_i^0} = \upsilon y_i^0; \quad z_j^0 = \frac{x_j^0}{\sum_{j=1}^{n} x_j^0} = \upsilon x_j^0; \quad \upsilon = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} x_j^0} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} y_i^0} \qquad (i = 1..m; j = 1..n).$$

Итак, решение игры с использованием методов ЛП включает этапы:

1. составляют пару двойственных задач, эквивалентных данной игре;
2. определяют оптимальные планы двойственных задач;
3. находят решение игры по соотношениям между планами задач, оптимальными стратегиями и ценой игры.

Пример 15. Найти решение игры, определяемой матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение:

Пара двойственных задач:

Прямая	Двойственная	Из решения пары задач:
$\max L = x_1 + x_2 + x_3;$	$\min L = y_1 + y_2 + y_3;$	
$x_1 + 2x_2 \le 1;$	$y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 1;$	$\upsilon = \dfrac{1}{1/2 + 1} = \dfrac{1}{1/2 + 1} = \dfrac{2}{3};$
$x_1 + x_3 \le 1;$	$2y_1 + y_3 \ge 1;$	
$2x_1 + x_2 \le 1;$	$y_2 \ge 1;$	
$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$	$y_1, y_2, y_3 \ge 0.$	$u^0 = (1/3;\ 2/3;\ 0);$
$x^0 = (0;\ 1/2;\ 1).$	$y^0 = (1/2;\ 1;\ 0).$	$z^0 = (0;\ 1/3;\ 2/3).$

Таким образом, если для всякой матричной игры можно записать симметричную пару двойственных задач, то и для всякой симметричной пары двойственных задач можно записать матричную игру.

Пусть задана симметричная пара двойственных задач:

$$\left\{\begin{array}{c|c} \max L = CX; & \min L = BY; \\ AX \le B; & A^{T}Y \ge C; \\ X \ge 0. & Y \ge 0. \end{array}\right\}.$$

Тогда этой паре двойственных задач можно поставить в соответствие игру, определяемую матрицей $D = \begin{pmatrix} 0 & A & -B \\ -A^{T} & 0 & C^{T} \\ B^{T} & -C & 0 \end{pmatrix}.$

Вывод. Если каждая матричная игра имеет оптимальные стратегии, то не всякая задача ЛП имеет решения.

Пример 16.			
	$\max (2x_1 + 3x_2);$	$\min (10y_1 + 12y_2);$	$L^0 = 19{,}71.$
	$2x_1 + x_2 \le 10;$	$2y_1 - y_2 \ge 2;$	$x^0 = \begin{pmatrix} 2{,}5714 \\ 4{,}8571 \end{pmatrix}.$
	$-x_1 + 3x_2 \le 12;$	$y_1 + 3y_2 \ge 3;$	

$x_1, x_2 \geq 0.$	$y_1, y_2 \geq 0.$

Решение: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; $A^{т} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix}$; $B^{т} = (10;12)$; $C = (2;3)$; $C^{т} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Тогда матрица игры будет $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -12 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 3 \\ 10 & 12 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Использование QSB в процессе принятия решений

QSB - это набор программ (русифицированный авторами пособия), с помощью которого можно «проигрывать» различные варианты решения экономических и производственных задач, выявлять оптимальные из них и анализировать полученные результаты, используя различные методы.

Запуск QSB осуществляется вводом команды: *prog1* и, после появления функционального меню, нажатием цифры $\boxed{9}$. Далее на экране появится главное меню системы:

QSB - Количественные Системы для бизнеса ! Вы можете выбрать следующие системы поддержки принятия решений:			
Код	программа	Код	программа
1	Линейное программирование	9	Управление запасами
2	Целочисленное программирование	A	Теория очередей (расписаний)
3	Транспортная задача	B	Имитационное моделирование
4	Задача о назначениях	C	Вероятностные модели
5	Сетевое моделирование (NET)	D	Марковские модели
6	Сетевое моделирование (CPM)	E	Экстраполяция тенденций
7	Сетевое моделирование (PERT)	F	Определение типа принтера
8	Динамическое программирование	G	Выход из QSB

Линейное программирование решает задачи ЛП, включающие до 40 переменных (без учета дополнительных и искусственных) и 40 ограничений (без учета граничных условий), используя симплекс-метод.

Целочисленное программирование реализует алгоритм метода ветвей и границ для решения смешанных задач целочисленного программирования размерностью до 20 переменных и 20 ограничений.

Транспортная задача решает транспортные задачи, содержащие до 50 пунктов отправления и до 50 пунктов назначения, используя для получения начального допустимого решения метод северо-западного угла и метод аппроксимации Фогеля, а для оптимального плана - метод потенциалов;

Задача о назначениях предназначена для решения Венгерским методом задач о назначении, включающих до 60 работ и 60 кандидатов.

Сетевое моделирование (NET) содержит три алгоритма для анализа сетей размерностью до 150 ветвей и до 75 узлов: алгоритм кратчайшего пути (определяет кратчайший путь от начального узла сети до любого другого), алгоритм максимального потока (находит максимальный поток от начального узла до конечного) и алгоритм минимального размаха дерева (устанавливает минимальную длину полного пути).

Сетевое моделирование (CPM) определяет раннее и позднее время начала и окончания работ методом критического пути для сетей, включающих до 200 работ.

Сетевое моделирование (PERT) анализирует сети объемом до 200 работ методом PERT.

Динамическое программирование решает три задачи ДП размерностью до 20 этапов с 50 пунктами в каждом: задачу о дилижансе, задачу о рюкзаке, задачу управления запасами.

Управление запасами определяет оптимальный размер запасов и решает задачу о разносчике газет.

Теория очередей (расписаний) анализирует работу одноканальных и многоканальных систем массового обслуживания с ограниченной и неограниченной длиной очереди и различными законами распределения времени обслуживания.

Имитационное моделирование использует метод Монте-Карло для анализа систем очередей с 20 каналами обслуживания, 20 очередями, 100 заявками в очереди максимум.

Вероятностные модели обеспечивает проведение дисперсионного и байесовского анализа, анализа платежной матрицы и дерева решений. При дисперсионном анализе по заданным исходам и вероятностям вычисляется среднее и дисперсия. При байесовском анализе по априорным вероятностям состояний природы и условным вероятностям исходов определяются совместные, безусловные и апостериорные вероятности. При анализе платежной матрицы размерностью до 40 состояний природы и до 40 альтернатив рассчитываются различные критерии. Программа анализирует деревья решений, включающие до 80 ветвей с заданной вероятностью.

Марковские модели позволяет найти вероятность нахождения системы в заданном состоянии в заданное время с помощью Марковских моделей (общее число состояний - не более 50).

Экстраполяция тенденций вычисляет простое и скользящее среднее, производит простое и двойное экспоненциальное сглаживание, а также линейную регрессию.

Определение типа принтера. В начале каждого сеанса работы необходимо задать тип принтера (если планируется его использование), для чего и предусмотрена эта опция.

Выход из QSB служит для окончания работы пользователя с системой.

Для выбора пункта меню нужно выделить его курсором с помощью клавиш $\boxed{\uparrow}$, $\boxed{\downarrow}$, $\boxed{\rightarrow}$, $\boxed{\leftarrow}$ и нажать $\boxed{\text{Enter}}$; или нажать «горячую» клавишу, соответствующую коду программы.

При работе с пунктами 1-Е на экране появляется функциональное меню:

Добро пожаловать в линейное программирование !
Варианты работы с LP :
Если вы работаете с системой впервые, то выберите опцию 1.
Опция Функция
1 ---- Помощь по LP
2 ---- Ввод новой задачи
3 ---- Чтение задачи с диска
4 ---- Просмотр/Печать исходных данных

5	----	Решение задачи
6	----	Запись задачи на диск
7	----	Изменение задачи
8	----	Просмотр/Печать итогового решения
9	----	Возврат в главное меню
0	----	Выход из QSB

Функция 1 - выводит краткое описание используемой программы (в данном случае ЛП); 2 - служит для ввода исходных данных новой задачи непосредственно с клавиатуры; 3 - предназначена для ввода исходных данных задачи из файла; 4 - осуществляет вывод исходных данных на экран и/или принтер; 5 - обеспечивает решение задачи и просмотр этого процесса по шагам; 6 - сохраняет исходные данные задачи в файле; 7 - производит корректировку исходных данных путем изменения количества переменных, ограничений или значений коэффициентов задачи; 8 - выводит на экран и/или принтер итоговое решение; 9 - обеспечивает выход в главное меню системы; 0 - позволяет окончить работу с системой.

Процедура принятия решения с использованием QSB сводится к четырем этапам: постановке задачи, подготовке исходных данных, решению задачи и анализу полученных результатов. Рассмотрение этих этапов для различных видов задач будет изложено далее.

Решение задач линейного программирования. Порядок решения задач ЛП с помощью QSB рассмотрим на примере.

Подготовьте ЭММ задачи для решения на ПК:

$$
\begin{gathered}
\max L_1 = 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4; \\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \le 40; \\
6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 110; \\
4x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 12x_4 \le 100; \\
x_1 \ge 1; \\
x_1 \le 12; \\
x_3 \ge 2; \\
x_4 = 3.
\end{gathered}
$$

В нашей задаче: ЦФ на максимум, 4 переменных и 7 ограничений. Условия неотрицательности переменных (т.е., $x_2 \geq 0$) заданы по умолчанию.

Выберите опцию Линейное программирование в главном меню системы. На экране появится функциональное меню:

Добро пожаловать в линейное программирование ! Варианты работы с LP : Если вы работаете с системой впервые, то выберите опцию 1.		
Опция		Функция
1	----	Помощь по LP
2	----	Ввод новой задачи
3	----	Чтение задачи с диска
4	----	Просмотр/Печать исходных данных
5	----	Решение задачи
6	----	Запись задачи на диск
7	----	Изменение задачи
8	----	Просмотр/Печать итогового решения
9	----	Возврат в главное меню
0	----	Выход из QSB

В функциональном меню выберите опцию 2-Ввод новой задачи. В верхней строке экрана появится запрос о названии задачи:

Введите название задачи (до 6 символов) ? prim1

Наберите имя задачи, длиной не более 6 символов, например, *prim1* и нажмите $\boxed{\text{Enter}}$. При нажатии $\boxed{\text{Enter}}$ без ввода имени автоматически происходит возврат в функциональное меню.

Вверху экрана появятся требования, которые необходимо соблюдать при вводе исходных данных (способы представления чисел, знаки отношения в неравенствах, клавиши перемещения курсора и др.); а внизу - вопросы о задаче:

```
Критерий на максимум (1) или минимум (2) ? (Введите 1 или 2)              <1 >
Сколько переменных в вашей задаче? (введите число <= 40)                  <4 >
Сколько ограничений в вашей задаче? (введите число <= 40)                 <7 >
Хотите использовать заданные имена переменных (X1,X2,...,Xn) (Y/N)?   <y >
```

Ответьте на вопросы. Варианты ответов показаны выше (ЦФ на максимум, 4 переменных и 7 ограничений, будем использовать заданные имена переменных - X_1, X_2, ... , X_n). Переход от предыдущей строки к последующей осуществляется нажатием Enter, обратный переход - клавишей Backspace.

Если при вводе не было ошибок, то по окончании нажмите клавишу Spacebar (пробел); для корректировки введенной информации - любую другую клавишу.

На экране появится шаблон ЭММ (ЦФ и ограничения) со свободными позициями для ввода коэффициентов. Заполните шаблон, при необходимости поменяйте знаки (<=, >=, =):

```
Max  60______X1  70______X2  120_____X3  130_____X4
Ограничен.
( 1) 1_______X1  2_______X2  3_______X3  4_______X4  ≤ 40______
( 2) 6_______X1  5_______X2  4_______X3  3_______X4  ≤ 110_____
( 3) 4_______X1  6_______X2  8_______X3  12______X4  ≤ 100_____
( 4) 1_______X1  ________X2  ________X3  ________X4 >=1_______
( 5) 1_______X1  ________X2  ________X3  ________X4  ≤ 12______
( 6) ________X1  ________X2  1_______X3  ________X4 >=2_______
( 7) ________X1  ________X2  ________X3  1_______X4  = 3_______
```

После нажатия клавиши Spacebar на экране появится функциональное меню. В функциональном меню выберите опцию 6-Запись задачи на диск. В верхней части экрана появится запрос об имени файла, в котором будут храниться исходные данные задачи.

Наберите имя файла (например, такое же как и имя задачи, т.е. *prim1*) и нажмите $\boxed{\text{Enter}}$. Для просмотра существующих файлов введите имя диска и нажмите $\boxed{\text{Enter}}$. При нажатии $\boxed{\text{Enter}}$ без ввода имени файла осуществляется автоматический возврат в функциональное меню.

Если файла нет на диске, то выводится сообщение: «Задача записана. Для продолжения любая клавиша.». Если файл с таким именем существует, то требуется подтверждение о замене его содержимого (Y) или отмене записи задачи (N): «Этот файл уже существует. Заменить его (Y/N)?» Введите *Y* или *N* и нажмите $\boxed{\text{Enter}}$. На экране появится функциональное меню.

В функциональном меню выберите опцию 3-Чтение задачи с диска. В верхней части экрана появится запрос об имени файла, в котором хранятся исходные данные задачи.

Наберите имя файла *prim1* и нажмите $\boxed{\text{Enter}}$. Для просмотра существующих файлов введите имя диска и нажмите $\boxed{\text{Enter}}$. При нажатии $\boxed{\text{Enter}}$ без ввода имени файла осуществляется автоматический возврат в функциональное меню.

Если файла нет на диске, то выводится сообщение: «Нет такого файла. Повторите ввод.». Если файл с таким именем существует, но в нем хранятся данные не задачи ЛП, то выводится сообщение: «В этом файле нет задачи линейного программирования.». И в том, и в другом случае необходимо повторить ввод имени файла. Если задача прочитана успешно, то выводится сообщение: «Задача прочитана. Для продолжения любая клавиша.». После нажатия любой клавиши на экране появится функциональное меню.

В функциональном меню выберите опцию 4-Просмотр/Печать исходных данных. Если задача не была введена или прочитана с диска, то будет выдано сообщение: «Задача не введена. Для продолжения любая клавиша.», и после нажатия любой клавиши на экране появится функциональное меню; в противном случае - в верхней строке экрана появится запрос о необходимости вывода данных на принтер.

Убедитесь, что принтер готов к работе, введите символ *Y* (если распечатка не требуется, то - символ *N*) и нажмите Enter. На экран (и принтер, если задано) будет выведено описание исходных данных задачи.

В задачах большой размерности исходные данные могут занимать несколько экранных страниц. Перемещение к следующей странице осуществляется нажатием клавиши /. к предыдущей странице - Esc. Для выхода в функциональное меню нажмите клавишу Spacebar после окончания просмотра.

В функциональном меню выберите опцию 5-Решение задачи. На экране появится меню опции <Решение>:

Меню опции <Решение>
пункт 1 ---- Решение и просмотр начальной таблицы 2 ---- Решение и просмотр итоговой таблицы 3 ---- Решение и просмотр начальной и итоговой таблиц 4 ---- Решение и просмотр всех таблиц 5 ---- Решение без просмотра таблиц 6 ---- Возврат в функциональное меню

Выбор опции 6 обеспечивает возврат в функциональное меню без решения задачи. При выборе остальных опций задача будет решена. При этом для задач небольшой размерности доступны все режимы, а для больших задач - только опции 4-5. С целью усвоения алгоритма симплекс-метода начинающему пользователю рекомендуется выбирать опцию 4, обеспечивающую просмотр процесса решения по шагам.

Выберите опцию 4 ---- Решение и просмотр всех таблиц . На экране появится информация по каждой итерации, причем для больших задач (наш пример) выдается только номер итерации, текущее значение ЦФ, вводимые и выводимые из базиса вектора:

итерация : 1 Новая цф(Max.) = 390 + (-3 Big M)

Вводим: X4 значение = 3 Выводим: A7 Стр 7

Для небольших задач информация оформлена в виде симплекс-таблицы:

Базис	C(j)	X1	X2	S1	A1	S2	B(i)	B(i) / A(i,j)
		2.000	3.000	0	-M	0		
A1	-M	2.000	1.000	-1.00	1.000	0	5.000	2.500
S2	0	1.000	5.000	0	0	1.000	20.00	20.00
C(j)-Z(j)		2.000	3.000	0	0	0	0	
*Big M		2.000	1.000	-1.00	0	0	-5.00	
Текущее значение целевой функции (Max.) = 0 + (-5 Big M) < подсвеченные переменные вводим или выводим из базиса > Вводим: X1 Выводим: A1								

В первой колонке указываются имена базисных переменных (естественные переменные обозначаются X_1, X_2, ... , или как Вы их обозначили; дополнительные - S_1, S_2, ...; искусственные - A_1, A_2, ...).

Во второй колонке находятся коэффициенты ЦФ, соответствующие базисным переменным.

В заголовках следующих пяти колонок указаны имена переменных и коэффициенты ЦФ (строкой ниже). В колонках 2 и 3 находятся коэффициенты матрицы ограничений модели, а в колонках 5-7 - базисные вектора, образованные путем введения в систему дополнительных и искусственных переменных.

В 8 колонке - столбец свободных членов.

В 9 колонку (кроме начальной таблицы, в которой в 9 колонке помещены нули) заносятся отношения правых частей ограничений к соответствующим координатам вектора, вводимого в базис. Эти отношения необходимы для определения вектора, выводимого из базиса. Из базиса выводится вектор, имеющий наименьшее отношение. Деление на ноль в последней колонке обозначается символом Inf.

В двух последних строках таблицы рассчитываются относительные оценки (колонки 3-7) и в 8 колонке помещается значение ЦФ при данном базисном плане, причем в последней строке считаются оценки и значение ЦФ исходной задачи, а в последней строке - расширенной задачи, полученной путем введения искусственных переменных.

ЦФ расширенной задачи определяется следующим образом: $\max L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - M \sum_{j=n+1}^{n+m} x_j$, где M (Big M)- достаточно большое положительное число.

Оценки считаются по формуле $C(j) - Z(j) = C(j) - \sum_{i \in \sigma} C(i) \cdot x(i, j)$, где σ - множество индексов базисных векторов, $\sigma=\{1,2,...,m\}$; C(j) - коэффициенты ЦФ; x(i, j) - коэффициенты разложения векторов матрицы ограничений по единичному базису (i=1..m; j=1..n+m). Признаком оптимальности базисного допустимого плана служит наличие неположительных двойственных оценок.

По последней строке определяется вектор, подлежащий включению в базис. Этот вектор имеет наибольшую относительную оценку. Итерационный процесс на основе анализа оценок последней строки проводится с целью исключения из базиса всех искусственных векторов, затем, если существует хотя бы одно допустимое решение, процесс отыскания оптимального плана исходной задачи продолжается с использованием предпоследней строки.

Ниже таблицы выдается текущее значение ЦФ для данной итерации и указываются имена вводимой в базис и выводимой из базиса переменных. В таблице эти переменные выделены цветом. Под последней симплекс-таблицей показано значение ЦФ, вычисленное на оптимальном плане.

Переход от одной итерации к другой осуществляется нажатием любой клавиши, кроме *G*, при нажатии которой вычислительный процесс пойдет без остановки до конца.

В результате решения задачи возможна выдача таких сообщений: «Нет допустимого решения.», «Целевая функция не ограничена», В этих случаях осуществляется выход в функциональное меню.

Если найден оптимальный план, то после просмотра процесса решения, согласно выбранному режиму (1-4) или без просмотра итераций (5) система выдаст сообщение «Найдено оптимальное решение. Для продолжения любая клавиша» и после нажатия любой клавиши выведет меню способов представления полученного решения задачи:

Меню опции <Просмотр/Печать итогового решения> prim1 Варианты работы для просмотра/печати итогового решения. Для печати итогового решения подготовьте принтер
пункт 1 ---- Просмотр итогового решения 2 ---- просмотр решения и анализ чувствительности 3 ---- просмотр/печать решения 4 ---- просмотр/печать решения и анализ чувствительности 5 ---- Возврат в функциональное меню

Опция 5 позволяет вернуться в функциональное меню без просмотра результатов. Опции 1-4 обеспечивают вывод на экран (а 3-4 - и на принтер) итогового решения и результатов анализа чувствительности коэффициентов ЦФ и коэффициентов правой части ограничений. Аналогичное функции предлагаются в пункте 8 функционального меню.

Выберите опцию 2 - просмотр решения и анализ чувствительности. На экране появится таблица с результатами решения задачи:

итоговые результаты prim1 Стр. : 1					
перемен. No. имена	Решение	Дв.оц.	перемен. No. имена	Решение	Дв.оц.
1 X1	1.0000	0.0000	9 A4	0.0000	0.0000
2 X2	0.0000	0.0000	10 S5	11.0000	0.0000
3 X3	7.5000	0.0000	11 S6	0.0000	20.0000
4 X4	3.0000	0.0000	12 A6	0.0000	-20.0000
5 S1	4.5000	0.0000	13 S7	5.5000	0.0000
6 S2	65.0000	0.0000	14 A7	0.0000	0.0000
7 S3	0.0000	15.0000	15 A8	0.0000	-50.0000
8 S4	0.0000	0.0000			
Maximum значение ц.ф. = 1350 (из множ-ва реш) итерац.= 5					

После 5 итераций получен оптимальный план задачи $X^*=(1;\ 0;\ 7{,}5;\ 3)$. Прибыль от реализации продукции составит 1350 д.е. Пользуясь этой таблицей, можно начать послеоптимизационный анализ задачи, основанный на двойственных оценках (колонки 3 и 6), а именно определить степень дефицитности ресурсов, установить, как изменится значение ЦФ при изменении запасов ресурсов на единицу. Финансы оказались лимитирующим ресурсом (S3=0, двойственная оценка положительна), остальные ресурсы - избыточные. Увеличение финансов приведет к увеличению прибыли, а рост материальных и трудовых ресурсов - нет. Более подробный анализ решения производится автоматически в двух последующих таблицах.

После нажатия любой клавиши на экране появится таблица, содержащая анализ чувствительности коэффициентов ЦФ к изменению исходных данных:

Анализ чувствительности коэффициентов ц.ф Стр. : 1							
C(j)	Min. C(j)	исходное	Max. C(j)	C(j)	Min. C(j)	исходное	Max. C(j)
C(1)	- бесконеч	60.0000	60.0000	C(3)	120.0000	120.0000	+ бесконеч
C(2)	- бесконеч	70.0000	90.0000	C(4)	- бесконеч	130.0000	+ бесконеч

Здесь для каждого коэффициента ЦФ указано его исходное значение, а также нижняя и верхняя граница возможного его изменения с сохранением оптимального плана (т.е., цена $П_2$ может изменяться в интервале $[-\infty;90]$ без изменения оптимального плана).

После нажатия любой клавиши на экране появится таблица, содержащая анализ чувствительности для ресурсов (правой части ограничений) к изменению исходных данных:

Анализ чувствительности правой части Стр. : 1							
B(i)	Min. B(i)	исходное	Max B(i).	B(i)	Min. B(i)	исходное	Max B(i).
B(1)	35.5000	40.0000	+ бесконеч	B(5)	1.0000	12.0000	+ бесконеч
B(2)	45.0000	110.0000	+ бесконеч	B(6)	0.0000	0.0000	7.3333
B(3)	56.0000	100.0000	112.0000	B(7)	- бесконеч	2.0000	7.5000
B(4)	0.0000	1.0000	12.0000	B(8)	0.0000	3.0000	6.6667

Здесь для каждого вида ресурса указано его исходное значение, а также нижняя и верхняя граница возможного изменения запасов ресурсов с сохранением структуры оптимального плана (т.е., при изменении запаса третьего ресурса в пределах $[56;112]$ набор базисных переменных останется неизменным). Проверим данное утверждение, максимально изменив величину запаса третьего ресурса со 100 до 112.

Нажмите любую клавишу. На экране появится функциональное меню. Выберите опцию 7 - Изменение задачи. На экране появится меню для корректировки исходных данных задачи:

Меню опции <Изменение> prim1
пункт 1 ---- изменение коэффициентов задачи 2 ---- изменение ограничения 3 ---- плюс 1 ограничен. 4 ---- минус 1 ограничение 5 ---- плюс переменная

6 ---- минус переменная

7 ---- Просмотр/Печать исходных данных

8 ---- Возврат в функциональное меню

Работа с опциями 1 - 2 аналогична вводу данных новой задачи. В первом случае предоставляется возможность корректировки коэффициентов задачи, начиная с первого ограничения, а во втором - с заданного пользователем. Опции 3 и 4 предназначены для добавления и удаления одного ограничения. Опции 5 и 6 - для добавления и удаления одной переменной. Добавление переменной предполагает ввод ее имени и значений коэффициентов ЦФ и ограничений.

Выберите опцию 2 - изменение ограничения. На экране появится запрос (который выдается каждый раз при выборе опций 1- 6) на ввод названия задачи.

Нажмите $\boxed{\text{Enter}}$, т.о., все изменения будут производиться в текущей задаче. Далее появится запрос на ввод номера ограничения.

Наберите на клавиатуре номер ограничения (*3*) и нажмите $\boxed{\text{Enter}}$. На экране появится ЭММ задачи (с третьего ограничения).

Переместите курсор к цифре 100 и введите *112*. Для быстрого окончания корректировки нажмите дважды клавишу $\boxed{/}$.

В появившемся меню выберите опцию 8 - Возврат в функциональное меню.

Решите задачу. Ответ: $X^*=(1;\ 0;\ 9;\ 3)$, $L=1530$. Структура оптимального плана не изменилась.

Для окончания работы в функциональном меню выберите опцию 0 - Выход из QSB.

Решение задач целочисленного программирования. Порядок решения задач ЦП с помощью QSB рассмотрим на примере.

Подготовьте ЭММ задачи для решения на ПК, исключив условия неотрицательности переменных:

$$\max L = 20x_1 + 6x_2 + 8x_3;$$

$$10x_1 + 5x_2 + 4x_3 \le 206;$$

$$2x_1 + 7x_2 + 4x_3 \le 100;$$

$$x_2 - 2\delta_{21} - 4\delta_{22} - 6\delta_{23} - 8\delta_{24}=0;$$

$$x_3 - 4\delta_{31} - 8\delta_{32} - 12\delta_{33}=0;$$

$$\delta_{21} + \delta_{22} + \delta_{23} + \delta_{24} = 1;$$

$$\delta_{31} + \delta_{32} + \delta_{33} = 1 ,$$

$$x_1 \le 10$$

$$x_2 \le 8;$$

$$x_3 \le 12;$$

В нашей задаче: ЦФ на максимум, 10 переменных и 9 ограничений.

Выберите опцию 2 Целочисленное программирование в главном меню системы. На экране появится функциональное меню, идентичное рассмотренному ранее.

В функциональном меню выберите опцию 2-Ввод новой задачи, введите название задачи (например, *prim2*), ответьте на вопросы о задаче. Варианты ответов: ЦФ на максимум, 10 переменных и 9 ограничений, будем переименовывать переменные, т.е. при ответе на последний вопрос введите символ *N*. По окончании нажмите клавишу Spacebar. На экране появится шаблон для ввода новых имен переменных (вместо заданных $X_1, X_2, \dots, X_n$).

Переименуйте переменные, как показано ниже:

```
1 : <x1  >   2 : <x2  >   3 : <x3  >   4 : <d21 >   5 : <d22 >
6 : <d23 >   7 : <d24 >   8 : <d31 >   9 : <d32 >   10 :<d33 >
```

Переход к следующей позиции осуществляется нажатием Enter, обратный переход - клавишей Backspace. Если при вводе не было ошибок, то по окончании нажмите клавишу Spacebar; для корректировки введенной информации - любую другую клавишу.

На экране появится ряд дополнительных вопросов о задаче, на которые нужно ответить (*Y* - да, или *N* - нет):

Все переменные целые (Y/N)? y

значения всех переменных 0-1 (Y/N)? n

Вы будете задавать граничные условия (Y/N)? y

Заполните появившийся шаблон для ввода целочисленности переменных и границ их изменения:

Номер	имя	Целочислен. (I/C)	Нижн. гран.	Верх. гран.
1	x1	<I>	<0 >	<10 >
2	x2	<I>	<0 >	<8 >
3	x3	<I>	<0 >	<12 >
4	d21	<I>	<0 >	<32000 >
5	d22	<I>	<0 >	<32000 >
6	d23	<I>	<0 >	<32000 >
7	d24	<I>	<0 >	<32000 >
8	d31	<I>	<0 >	<32000 >
9	d32	<I>	<0 >	<32000 >
10	d33	<I>	<0 >	<32000 >

По умолчанию нижняя граница принимается равной 0, а верхняя - 32000. В третьей колонке показан статус переменной: I - целочисленная; C - нецелочисленная, который можно изменять. После ввода верхней границы переменной X_3 (т.е. *12*) можно нажать клавишу / для быстрого окончания корректировки. После нажатия клавиши Spacebar на экране появится шаблон ЭММ (ЦФ и ограничения) со свободными позициями для ввода коэффициентов.

Введите коэффициенты модели, при необходимости поменяйте знаки (<=, >=, =). Заполненный шаблон выглядит следующим образом:

Max 20______x1 6_______x2 8_______x3 ________d21 ________d22

________d23 ________d24 ________d31 ________d32 ________d33

Ограничен.

(1)	10______x1	5_______x2	4_______x3	________d21	________d22	
	________d23	________d24	________d31	________d32	________d33	≤ 206_____
(2)	2_______x1	7_______x2	4_______x3	________d21	________d22	
	________d23	________d24	________d31	________d32	________d33	≤ 100_____
(3)	________x1	1_______x2	______x3	-2______d21	-4______d22	
	-6______d23	-8______d24	________d31	________d32	________d33	= 0_______
(4)	________x1	________x2	1_______x3	________d21	________d22	
	________d23	________d24	-4______d31	-8______d32	-12_____d33	= 0_______
(5)	________x1	________x2	________x3	1_______d21	1_______d22	
	1_______d23	1_______d24	________d31	________d32	________d33	= 1_______
(6)	________x1	________x2	________x3	________d21	________d22	
	________d23	________d24	1_______d31	1_______d32	1_______d33	= 1_______

После нажатия Spacebar на экране появится функциональное меню.

В функциональном меню выберите опцию 5-Решение задачи. На экране появится меню опции <Решение>:

Меню опции <Решение> prim2
Опции
1 ---- Решение и просмотр первой итерации
2 ---- Решение и просмотр всех итераций
3 ---- Решение без просмотра итераций
4 ---- изменение толеранса (по умолчанию - .001)
5 ---- Возврат в функциональное меню

Опция 1 обеспечивает вывод в виде таблицы результатов только первой итерации, а опция 2 - всех итераций. При выборе опции 3 задача будет решена без просмотра итераций. 4 опция предназначена для изменения толеранса (допустимой погрешности целого при вычислениях, по умолчанию толеранс равен 0.001). Выбор опции 5 обеспечивает возврат в функциональное меню без решения задачи.

Выберите опцию 2-Решение и просмотр всех итераций. Результаты решения на каждой итерации представлены одинаковыми по форме таблицами, причем решение на первой итерации совпадает с решением, получаемым при решении задачи программой «Линейное программирование»:

Текущее решение итерация : 1 Стр.: 1					
Нижн.гран	перемен	Верх. гр.	перемен	Решение	коэффициент
0 ≤	x1	≤ 10	x1	10.000	20.000
0 ≤	x2	≤ 8	x2	4.571	6.000
0 ≤	x3	≤ 12	x3	12.000	8.000
0 ≤	d21	≤ бесконеч	d21	0.571	0.000
0 ≤	d22	≤ бесконеч	d22	0.000	0.000
0 ≤	d23	≤ бесконеч	d23	0.000	0.000
0 ≤	d24	≤ бесконеч	d24	0.429	0.000
0 ≤	d31	≤ бесконеч	d31	0.000	0.000
0 ≤	d32	≤ бесконеч	d32	0.000	0.000
0 ≤	d33	≤ бесконеч	d33	1.000	0.000
нецелочисленное решение, цф (Max.) = 323.4286 ZL =-1E+20					

В первой и третьей колонках указываются нижняя и верхняя граница изменения переменных, в пятой - полученные значения переменных, в шестой - коэффициенты ЦФ. В последней строке выдается: либо текущее нецелочисленное значение ЦФ и нижняя граница ЦФ (ZL), либо сообщение «ветвь не имеет допустимого решения».

Переход от одной итерации к другой осуществляется нажатием любой клавиши, кроме *G*, при нажатии которой вычислительный процесс пойдет без остановки до конца.

В результате решения задачи возможна выдача таких сообщений: «Нет допустимого решения.», «Целевая функция не ограничена». В этих случаях осуществляется выход в функциональное меню. Если найден оптимальный план, то система выдаст сообщение «Найдено оптимальное решение. Для продолжения любая клавиша».

После нажатия любой клавиши выведет меню способов представления полученного решения задачи:

Меню опции <Просмотр/Печать итогового решения> prim2
Опции 1 ---- Просмотр итогового решения 2 ---- Просмотр и печать итогового решения 3 ---- Возврат в функциональное меню

Опция 2 отличается от опции 1 только тем, что одновременно с выводом окончательного решения на дисплей осуществляется его печать на принтер. Аналогичное функции предлагаются в пункте 8 функционального меню.

Выберите опцию 1-просмотр итогового решения. На экране появится таблица с результатами решения задачи:

итоговые результат prim2 Стр. : 1					
перемен. No. имя	Решение	коэффициент цел.функц	перемен. No. имя	Решение	коэффициент цел.функц
1 x1	10.000	0.0000	6 d23	0.000	0.000
2 x2	4.000	0.0000	7 d24	0.000	0.000
3 x3	12.000	0.0000	8 d31	0.000	0.000
4 d21	0.000	0.0000	9 d32	0.000	0.000
5 d22	1.000	0.0000	10 d33	1.000	0.000
Maximum значение ц.ф. = 320 итоговая итерац.= 79					

После 79 итераций получен оптимальный план задачи X^*=(10; 4; 12; 0; 1; 0; 0; 0; 0; 1). Прибыль от реализации продукции составит 320 д.е.

Решение транспортной задачи. Порядок решения транспортных задач с помощью QSB рассмотрим следующем примере.

Требуется составить такой план прикрепления трех потребителей к трем поставщикам, при котором общая стоимость перевозок будет минимальной. Тарифы перевозки единицы продукции от поставщиков к потребителям, объемы предложения поставщиков и спроса потребителей заданы в таблице.

Поставщики	Тарифы перевозок			Предложение поставщиков
	1	2	3	
1	7	6	4	120
2	3	8	5	100
3	2	3	7	80
Спрос потребителей	90	90	120	

Обозначим через x_{ij} - количество единиц груза, запланированных к перевозке от i-го поставщика к j-му потребителю.

Тогда ЭММ:

$$\begin{aligned}
&\min L = 7x_{11} + 6x_{12} + 4x_{13} + 3x_{21} + 8x_{22} + 5x_{23} + 2x_{31} + 3x_{32} + 7x_{33};\\
&x_{11} + x_{12} + x_{13} = 120;\\
&x_{21} + x_{22} + x_{23} = 100;\\
&x_{31} + x_{32} + x_{33} = 80;\\
&x_{11} + x_{21} + x_{31} = 90;\\
&x_{21} + x_{22} + x_{32} = 90;\\
&x_{31} + x_{32} + x_{33} = 120.
\end{aligned}$$

Здесь предполагается, что суммарное предложение равно суммарному спросу. Такая задача называется закрытой или замкнутой. Если это условие не выполняется, то задача называется открытой. Для сведения открытой задачи к закрытой вводится или фиктивный поставщик или фиктивный потребитель.

Подготовьте ЭММ задачи для решения на ПК, причем объемы предложения поставщиков и спроса потребителей должны быть целыми числами, а тарифы перевозок могут быть вещественными. Итак, в нашей задаче: ЦФ на минимум, 3 поставщика, 3 потребителя. Предложение поставщиков: 120, 100 и 80. Спрос потребителей: 90, 90 и 120.

Выберите опцию 3 Транспортная задача в главном меню системы. На экране появится функциональное меню, идентичное рассмотренному ранее.

В функциональном меню выберите опцию 2-Ввод новой задачи, введите название задачи (например, *prim3*), ответьте на вопросы о задаче. Варианты ответов: ЦФ на минимум, 3 поставщика, 3 потребителя. будем использовать заданные обозначения поставщиков ($S_1, S_2, ..., S_n$) и потребителей (D_1, D_2, ..., D_n). По окончании нажмите клавишу [Spacebar]. На экране появится шаблон для ввода объемов предложения поставщиков и спроса потребителей.

Заполните шаблон следующим образом:

```
постав.:
 S1:   120___  S2:   100___  S3:   80____
потребитель :
 D1:   90____  D2:   90____  D3:   120___
```

После нажатия клавиши [Spacebar] на экране появится шаблон для ввода стоимости перевозок (или прибыли от перевозок).

Введите данные, как показано ниже:

```
от     к
S1     D1:   7_____ D2:   6_____ D3:   4_____
S2     D1:   3_____ D2:   8_____ D3:   5_____
S3     D1:   2_____ D2:   3_____ D3:   7_____
```

После нажатия [Spacebar] на экране появится функциональное меню.

В функциональном меню выберите опцию 5-Решение задачи. На экране появится меню опции <Решение>:

Меню опции <Решение> prim3
Опции

1 ---- Решение и просмотр начальной таблицы

2 ---- Решение и просмотр всех таблиц

3 ---- Решение и просмотр итоговой таблицы

4 ---- Решение без просмотра таблиц

5 ---- использовать метод Фогеля

6 ---- Возврат в функциональное меню

Выбор опции 6 обеспечивает возврат в функциональное меню без решения задачи. При выборе остальных опций задача будет решена. При этом для задач небольшой размерности доступны все режимы, а для больших задач - только опции 4-6.

Для построения начального допустимого плана по умолчанию используется метод северо-западного угла, который можно заменить на метод аппроксимации Фогеля с помощью опция 4.

Для поиска оптимального плана применен метод потенциалов. При этом признаком оптимальности плана является существование таких чисел U(i) и V(j), для которых выполняются условия:

$$U(i)+V(j)=C(i,j) \text{ для } x_{ij}>0;$$
$$U(i)+V(j)\leq C(i,j) \text{ для } x_{ij}=0, \qquad (*)$$

где C(i,j) и x_{ij} - стоимость перевозки единицы груза и количество перевозимого груза от i-го поставщика (i=1..m) j-му потребителю (j=1..n).

Выберите опцию 2-Решение и просмотр всех таблиц. Результаты решения на каждой итерации представлены одинаковыми по форме таблицами.

В первой таблице показан начальный допустимый план прикрепления поставщиков к потребителям (потенциалы U(i) и V(j) полагаются равными нулю, значение ЦФ = 2050). Переход к следующей таблице осуществляется нажатием любой клавиши, кроме *G*, при нажатии которой вычислительный процесс пойдет без остановки до конца.

В этой таблице вычислены потенциалы по формуле (*). Признак оптимальности плана не выполнен для клетки (S3, D1), а именно U(3)+V(1)=4+7=11 превосходит стоимость перевозки от поставщика S3 к потребителю D1 на 9, что изображено в виде и в этой клетки поставлены две звездочки (**). Это значит, что в данную клетку следует поместить перевозку, объем которой равен 60 (определяется из цикла (3,1)-(3,3)-(2,3)-(2,2)-(1,2)-(1,1)).

начальн. решение NWC					
SN \ DN	D1	D2	D3	предлож.	U(i)
S1	7.000 90.00	6.000 30.00	4.000	120.0	0
S2	3.000	8.000 60.00	5.000 40.00	100.0	0
S3	2.000	3.000	7.000 80.00	80.00	0
спрос V(j)	90.00 0	90.00 0	120.0 0		
Минимум значение цф = 2050					

На следующей итерации фиксируется перемещение перевозок по циклу, вычисляется текущее значение ЦФ (=1510), определяется клетка (S1, D3), для которой не выполнен признак оптимальности (e(1,3)=-8) и т.д. Процесс поиска оптимального решения заканчивается на четвертой итерации. После нажатия любой клавиши на экране появляется меню способов представления полученного решения задачи.

Выберите опцию 1-просмотр итогового решения. На экране появится таблица с результатами решения задачи:

итоговый результат prim3 Стр. : 1							
от	к	груз	тариф	от	к	груз	тариф
S1	D1	0.0	7.000	S2	D3	10.0	5.000
S1	D2	10.0	6.000	S3	D1	0.0	2.000

S1	D3	110.0	4.000	S3	D2	80.0	3.000
S2	D1	90.0	3.000	S3	D3	0.0	7.000
S2	D2	0.0	8.000				
миним. значение цф = 1060				итерация = 4			

После 4 итераций получили оптимальный план, согласно которому от первого поставщика везется ко второму потребителю 10, к третьему 110, к четвертому 90; от второго поставщика - к первому потребителю 90; к третьему 10; от третьего поставщика - ко второму потребителю 80.

Решение задачи о назначениях.

Порядок решения задачи о назначениях с помощью QSB рассмотрим на примере. Подготовьте исходные данные задачи для решения на ПК:

Кандидаты	Затраты времени по работам			
	1	2	3	4
1	3	7	5	8
2	2	4	4	5
3	4	7	2	8
4	9	7	3	8

Итак, в нашей задаче: ЦФ на минимум, 4 кандидата и 4 работы.

Выберите опцию 4 Задача о назначениях в главном меню системы. На экране появится функциональное меню, идентичное рассмотренному ранее.

В функциональном меню выберите опцию 2-Ввод новой задачи, введите название задачи (например, *prim4*), ответьте на вопросы о задаче. Варианты ответов: ЦФ на минимум, 4 кандидата, 4 работы, будем использовать заданные обозначения кандидатов ($O_1, O_2, ..., O_n$ - от objects) и работ (T_1, T_2, ..., T_n - от tasks). По окончании нажмите клавишу Spacebar. На экране появится шаблон для ввода затрат времени на монтажные работы.

Заполните шаблон следующим образом:

Ввод коэффициентов затрат/прибыли   Стр. 1

Кандид. Раб.

O1	T1:	3_____	T2:	7_____	T3:	5_____	T4:	8_____
O2	T1:	2_____	T2:	4_____	T3:	4_____	T4:	5_____
O3	T1:	4_____	T2:	7_____	T3:	2_____	T4:	8_____
O4	T1:	9_____	T2:	7_____	T3:	3_____	T4:	8_____

После нажатия Spacebar на экране появится функциональное меню.

В функциональном меню выберите опцию 5-Решение задачи. На экране появится меню опции <Решение>:

Меню опции <Решение> prim4
Опции 1 ---- Решение и просмотр начальной таблицы 2 ---- Решение и просмотр всех таблиц 3 ---- Решение и просмотр итоговой таблицы 4 ---- Решение без просмотра таблиц 5 ---- Возврат в функциональное меню

Выбор опции 5 обеспечивает возврат в функциональное меню без решения задачи. При выборе остальных опций задача будет решена. При этом для задач небольшой размерности доступны все режимы, а для больших задач - только опции 4-5.

Выберите опцию 2-Решение и просмотр всех таблиц. Результаты решения на каждой итерации представлены одинаковыми по форме таблицами:

итерация 1					
K\P	T1	T2	T3	T4	линия
O1	0	2.000	2.000	2.000	<--
O2	0	0	2.000	0	<--
O3	2.000	3.000	0	3.000	
O4	6.000	2.000	0	2.000	
линия			^		

Итерация 1 представляет собой первый шаг алгоритма венгерского метода. В строке «линия» вычеркнутые столбцы помечены символом (^). В столбце «линия» вычеркнутые строки помечены символом (<--). Переход к следующей итерации осуществляется нажатием любой клавиши, кроме *G*, при нажатии которой вычислительный процесс пойдет без остановки до конца.

Процесс поиска оптимального решения заканчивается на второй итерации. После нажатия любой клавиши на экране появляется меню способов представления полученного решения задачи.

Выберите опцию 1-просмотр итогового решения. На экране появится таблица с результатами решения задачи:

Сводка назначений для prim4 Стр. : 1					
Канд.	Раб.	затр/приб.	Канд.	Раб.	затр/приб.
O1	T1	3.000	O3	T3	2.000
O2	T2	4.000	O4	T4	8.000
Мин. значение цф = 17 число итераций = 2					

Первый кран закрепляется за первой работой, второй за второй, третий - за третьей, четвертый - за четвертой. При этом минимальное время на монтаж всех объектов равно 17.

Решение сетевых задач (net). Порядок решения сетевых задач с помощью QSB рассмотрим на следующем примере.

Пусть имеются пять пунктов, соединенных между собой дорогами так, что из любого пункта можно проехать в любой другой пункт. Известно расстояние от пункта i до пункта j.

Из пункта i	Расстояние до пункта j				
	1	2	3	4	5
1	0	10	25	25	10
2	1	0	10	15	2
3	8	9	0	20	10
4	14	10	24	0	15
5	10	8	25	27	0

Требуется найти кратчайший маршрут от пункта 1 до любого другого пункта.

Подготовьте исходные данные задачи

для решения на ПК: определите число ветвей и узлов в задаче (20 ветвей и 5 узлов).

Выберите опцию 5 Сетевое моделирование (NET) в главном меню системы. На экране появится функциональное меню, идентичное рассмотренному ранее.

В функциональном меню выберите опцию 2-Ввод новой задачи, введите название задачи (например, *prim5*), ответьте на вопросы о задаче. Варианты ответов: 20 ветвей, 5 узлов, будем использовать алгоритм кратчайшего пути. По окончании нажмите клавишу Spacebar. На экране появится шаблон для ввода расстояния между пунктами.

Заполните шаблон следующим образом:

Ветвь Номер	Ветвь Код	Нач. узел	Кон узел	Расстоян	Ветвь Номер	Ветвь Код	Нач. узел	Кон узел	Расстоян
1	<B1 >	<1 >	<2 >	<10 >	11	<B11 >	<3 >	<4 >	<20 >
2	<B2 >	<1 >	<3 >	<25 >	12	<B12 >	<3 >	<5 >	<10 >
3	<B3 >	<1 >	<4 >	<25 >	13	<B13 >	<4 >	<1 >	<14 >
4	<B4 >	<1 >	<5 >	<10 >	14	<B14 >	<4 >	<2 >	<10 >
5	<B5 >	<2 >	<1 >	<1 >	15	<B15 >	<4 >	<3 >	<24 >
6	<B6 >	<2 >	<3 >	<10 >	16	<B16 >	<4 >	<5 >	<15 >
7	<B7 >	<2 >	<4 >	<15 >	17	<B17 >	<5 >	<1 >	<10 >
8	<B8 >	<2 >	<5 >	<2 >	18	<B18 >	<5 >	<2 >	<8 >
9	<B9 >	<3 >	<1 >	<8 >	19	<B19 >	<5 >	<3 >	<25 >
10	<B10 >	<3 >	<2 >	<9 >	20	<B20 >	<5 >	<4 >	<27 >

Можно дать произвольные названия ветвям длиной до 6 символов (заданные по умолчанию - B1,..,Bn). Узлы нумеруются последовательно, начиная с 1 до 5. Ветви вводятся в произвольной последовательности. После нажатия клавиши Spacebar на экране появится функциональное меню.

В функциональном меню выберите опцию 5-Решение задачи. На экране появится меню опции <Решение>:

Меню опции <Решение> prim5
Опции
1 ---- Решение и просмотр по шагам
2 ---- Решение без просмотра по шагам
5 ---- Возврат в функциональное меню

Выбор опции 3 обеспечивает возврат в функциональное меню без решения задачи. Опция 1 обеспечивает просмотр процесса решения задачи с помощью заданного вами алгоритма (алгоритма кратчайшего пути). Опция 2 дает решение без просмотра процесса по шагам.

Выберите опцию 2-Решение без просмотра по шагам. Результат решения задачи:

итоговый кратчайший путь для prim5 Стр.: 1

узел	Расстоян	Кратчайший путь из узла 1
2	1	1- 2 (B1)
3	8	1- 3 (B2)
4	11	1- 2- 4 (B1-B7)
5	9	1- 2- 5 (B1-B8)

В графе «Расстоян» показана длина кратчайшего пути от 1 пункта до указанного пункта в графе «узел»; в последней графе - названия пунктов, через которые проходит кратчайший путь, а в скобках - названия ветвей. После нажатия любой клавиши на экране появится меню <Решение>.

Выйдите в функциональное меню и выберите 7-Изменение задачи.

На экране появится меню опции <Изменение>, в котором выберите опцию 5-выбор алгоритма. На экране появится меню выбора алгоритма модели, где показан текущий алгоритм и предложено 3 варианта выбора: алгоритм кратчайшего пути (1), алгоритм максимального потока (2) и алгоритм минимального размаха дерева (3).

итоговый поток для prim5	Стр.: 1
Ветвь	поток
1 - 2 (B1)	10
1 - 3 (B2)	25
1 - 4 (B3)	25
1 - 5 (B4)	10
2 - 3 (B6)	10
2 - 4 (B7)	15
2 - 5 (B8)	2
3 - 4 (B11)	20
3 - 5 (B12)	10
4 - 5 (B16)	15
Макс.итоговый поток= 0	

Введите цифру 2 и нажмите Enter. Ранее введенные данные о расстоянии между пунктами теперь интерпретируются как величина потока (объем грузоперевозок) между этими пунктами. Найдем максимальную величину потока от начального узла до конечного, т.е. максимальный суммарный объем грузоперевозок. Для этого вернитесь в функциональное меню и решите задачу.

Поскольку сеть замкнута в нашей задаче, то максимальный поток получился равным нулю.

Решение сетевых задач (CPM).

Порядок решения сетевых задач с помощью QSB рассмотрим на следующем примере.

Рассчитать параметры сети и оптимизировать сетевой график, если известны время выполнения (продолжительность) и стоимость работ в нормальных и экстремальных условиях.

Подготовьте исходные данные задачи для решения на ПК: определите число работ в задаче (12 работ).

Код работы	Время		Стоимость	
	норм.	Крит.	Норм.	Крит.
1-2	5	3	2000	2500
1-3	4	4	3000	3000
1-4	8	7	4000	5000
2-3	3	2	1200	1500
2-6	7	5	2000	3000
3-5	3	3	8000	8000
4-5	5	5	3000	3000
4-7	4	3	3000	3700
5-6	9	6	700	1600
5-7	11	7	1500	2000
6-8	8	6	600	1500
7-8	10	9	1000	1050

Выберите опцию 6 Сетевое моделирование (CPM) в главном меню системы.

В функциональном меню выберите опцию 2-Ввод новой задачи, введите название задачи (например, *prim6*), ответьте на вопрос о количестве работ в задаче (12 работ). По окончании нажмите клавишу Spacebar. На экране появится шаблон для ввода продолжительности и стоимости работ в нормальных и критических условиях. Если критические характеристики не известны, то оставляются пропуски. Продолжительность и стоимость работ задаются длиной не более 6 цифр, включая запятую.

Заполните шаблон следующим образом:

номер	назв	Нач. узел	Кон узел	Норм. продолж.	Крит. продолж.	Норм. стои	Крит. стои
1	<1-2 >	<1 >	<2 >	<5 >	<3 >	<2000 >	<2500 >
2	<1-3 >	<1 >	<3 >	<4 >	<4 >	<3000 >	<3000 >
3	<1-4 >	<1 >	<4 >	<8 >	<7 >	<4000 >	<5000 >
4	<2-3 >	<2 >	<3 >	<3 >	<2 >	<1200 >	<1500 >
5	<2-6 >	<2 >	<6 >	<7 >	<5 >	<2000 >	<3000 >
6	<3-5 >	<3 >	<5 >	<3 >	<3 >	<8000 >	<8000 >
7	<4-5 >	<4 >	<5 >	<5 >	<5 >	<3000 >	<3000 >
8	<4-7 >	<4 >	<7 >	<4 >	<3 >	<3000 >	<3700 >
9	<5-6 >	<5 >	<6 >	<9 >	<6 >	<700 >	<1600 >
10	<5-7 >	<5 >	<7 >	<11 >	<7 >	<1500 >	<2000 >
11	<6-8 >	<6 >	<8 >	<8 >	<6 >	<600 >	<1500 >
12	<7-8 >	<7 >	<8 >	<10 >	<9 >	<1000 >	<1050 >

Можно дать произвольные названия работам длиной до 6 символов. Работы вводятся в произвольной последовательности. После нажатия клавиши Spacebar на экране появится функциональное меню.

В функциональном меню выберите опцию 5-Решение задачи. На экране появится меню опции <Решение>:

Меню опции <Решение> prim6

Опции

1 ---- Решение с показом результатов

2 ---- Решение без показа результатов

3 ---- печать итогового решения

4 ---- критический анализ

5 ---- Возврат в функциональное меню

Выбор опции 5 обеспечивает возврат в функциональное меню без решения задачи. Опция 1 обеспечивает просмотра процесса решения задачи по шагам. Опция 2 дает решение без показа результатов. Опция 3 позволяет напечатать итоговые результаты. Опция 4 необходима для проведения критического анализа.

Выберите опцию 2 - Решение с показом результатов и нажмите Enter.

В первой графе таблицы дан порядковый номер работы, во второй - код работы, в третьей и четвертой - ранее и позднее время начала работы, в пятой и шестой - раннее и позднее время окончания работы, в седьмой - резерв времени по работам. Критические работы в последней графе помечены надписью «крит». В последней строке показано суммарное время выполнения работ (34) и суммарная стоимость (30000).

CPM анализ для prim6 Стр. 1						
N работы	назв.	раннее начало	позднее начало	раннее оконч.	позднее оконч.	Резерв
1	1-2	0	2.0000	5.0000	7.0000	2.0000
2	1-3	0	6.0000	4.0000	10.000	6.0000
3	1-4	0	0	8.0000	8.0000	крит.
4	2-3	5.0000	7.0000	8.0000	10.000	2.0000
5	2-6	5.0000	19.000	12.000	26.000	14.000
6	3-5	8.0000	10.000	11.000	13.000	2.0000

7	4-5	8.0000	8.0000	13.000	13.000	крит.
8	4-7	8.0000	20.000	12.000	24.000	12.000
9	5-6	13.000	17.000	22.000	26.000	4.0000
10	5-7	13.000	13.000	24.000	24.000	крит.
11	6-8	22.000	26.000	30.000	34.000	4.0000
12	7-8	24.000	24.000	34.000	34.000	крит.
сум.время = 34 сум.стоим.= 30000						

После нажатия любой клавиши на экране появится графическое изображение найденного решения:

```
        Критические пути   prim6          сум. время =  34  сум. стоим. = 30000
кп # 1   :
                 1-4              4-5              5-7              7-8
         1========>  4========>  5========>  7========>  8
```

После нажатия любой клавиши осуществляется возврат в меню <Решение>. Выберите опцию 4 - критический анализ.

Эвристический метод оптимизирует сеть по критерию "время-стоимость". Результаты критического анализа показываются по шагам. Перед выполнением каждого шага выдается запрос: «Сократить время, увеличив стоимость(Y/N)?». Каждый раз отвечайте *Y,* пока не появится сообщение: «Анализ выполнен».

По шагам выводится информация о том, какая критическая работа сокращается, каково при этом увеличение ее стоимости, суммарное время выполнения и суммарная стоимость работ:

```
Сокращается:
        Крит.  работа:  I  продолжит-ть:  7 увеличение ст-сти:   300
        Критические пути   prim6r          сум. время =  28  сум. стоим. = 32150
кп # 1   :
   C        F        J        L
```

```
1========> 4========> 5========> 7========> 8
```

В результате проведения критического анализа суммарное время выполнения работ уменьшилось с 34 до 28 единиц, а стоимость увеличилась с 30000 до 32150 д.е.

Программа Сетевое моделирование (PERT) предусмотрена для расчета параметров сети, когда продолжительности работ оцениваются пессимистически, наиболее вероятно и оптимистически. Процесс взаимодействия пользователя с этой программой аналогичен рассмотренному выше.

Решение задач динамического программирования. Порядок решения сетевых задач с помощью QSB рассмотрим на примере.

Подготовьте исходные данные задачи для решения на ПК: определите количество этапов в задаче (4 этапа), тип задачи (задача о дилижансе).

Выберите опцию 8 Динамическое программирование в главном меню системы.

В функциональном меню выберите опцию 2-Ввод новой задачи, введите название задачи (например, *prim7*), ответьте на вопрос о количестве этапов в задаче (4 этапа). Данные вводятся, начиная с первого этапа. Нумерация узлов выполняется автоматически с 1 (для первого этапа) до последнего узла. Длина несуществующего пути задается большим числом (например, в нашей задаче 999). Введите данные как показано ниже:

```
этап 1 : Сколько конечных узлов в этом этапе? 3
    от начал. узла 1 к конечн. узлу 2 :Расстояние/затр? 2
    от начал. узла 1 к конечн. узлу 3 :Расстояние/затр? 5
    от начал. узла 1 к конечн. узлу 4 :Расстояние/затр? 1
этап 2 : Сколько конечных узлов в этом этапе? 3
    от начал. узла 2 к конечн. узлу 5 :Расстояние/затр? 10
    от начал. узла 2 к конечн. узлу 6 :Расстояние/затр? 12
    от начал. узла 2 к конечн. узлу 7 :Расстояние/затр? 999
    от начал. узла 3 к конечн. узлу 5 :Расстояние/затр? 5
    от начал. узла 3 к конечн. узлу 6 :Расстояние/затр? 10
```

```
        от начал. узла   3  к конечн. узлу 7 :Расстояние/затр? 7
        от начал. узла   4  к конечн. узлу 5 :Расстояние/затр? 999
        от начал. узла   4  к конечн. узлу 6 :Расстояние/затр? 15
        от начал. узла   4  к конечн. узлу 7 :Расстояние/затр? 13
этап   3  :    Сколько конечных узлов в этом этапе?  2
        от начал. узла   5  к конечн. узлу 8 :Расстояние/затр? 7
        от начал. узла   5  к конечн. узлу 9 :Расстояние/затр? 5
        от начал. узла   6  к конечн. узлу 8 :Расстояние/затр? 3
        от начал. узла   6  к конечн. узлу 9 :Расстояние/затр? 4
        от начал. узла   7  к конечн. узлу 8 :Расстояние/затр? 7
        от начал. узла   7  к конечн. узлу 9 :Расстояние/затр? 1
этап   4  :    Сколько конечных узлов в этом этапе?  1
        от начал. узла   8  к конечн. узлу 10 :Расстояние/затр? 1
        от начал. узла   9  к конечн. узлу 10 :Расстояние/затр? 4
```

По окончании нажмите клавишу любую клавишу. В функциональном меню выберите опцию 5-Решение задачи. На экране появится меню опции <Решение>:

```
                    Меню опции <Решение>    prim7
-----------------------------------------------------------------
              Опция
               1  ----  Решение и просмотр по шагам
               2  ----  Решение без просмотра по шагам
               3  ----  печать итогового решения
               4  ----  Возврат в функциональное меню Опции
```

Выберите опцию 2-Решение с показом результатов. На экране появятся результаты решения задачи:

```
          итоговый кратчайший путь      prim7
           этап      ветвь          расстояние до п.назнач.
             4          1 - 3                17
```

3	3 - 7	12
2	7 - 9	5
1	9 - 10	4

Итоговый кратчайший путь проходит через пункты 1-3-7-9-10, суммарное расстояние равно 17.

Решение вероятностных моделей. Порядок решения вероятностных моделей с помощью QSB рассмотрим на следующем примере.

Выполнить анализ платежной матрицы $A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 4 \\ 8 & 3 & 7 \\ 5 & 5 & 8 \end{pmatrix}$.

Апостериорные вероятности (0,2; 0,3; 0,5).

Выберите опцию С Вероятностные модели в главном меню системы.

В функциональном меню выберите опцию 2-Ввод новой задачи, введите название задачи (например, *prim7*), ответьте на вопросы. Варианты ответов: тип анализа - анализ платежной матрицы (3 тип), количество состояний природы 3, количество альтернатив 3, платеж представлен прибылью (1).

Введите данные как показано ниже:

```
       S1:  0.2_____  S2:  0.3_____  S3:  0.5_____


Сост.   Альт.
S1      A1:  9_______ A2:  6_______ A3:  4_______
S2      A1:  8_______ A2:  3_______ A3:  7_______
S3      A1:  5_______ A2:  5_______ A3:  8_______
```

По окончании нажмите клавишу любую клавишу. В функциональном меню выберите опцию 5-Решение задачи. На экране появится меню опции <Решение>:

Анализ платеж.матрицы

Выберите один из следующих критериев:

1 -- Maximin

2 -- Maximax

3 -- Minimax

4 --ожид. значение

5 --принцип недостаточного основания

6 --ожидаемые потери

9 -- Возврат в функциональное меню

Последовательно выберите опции 1-6 и просмотрите результаты расчета критериев.

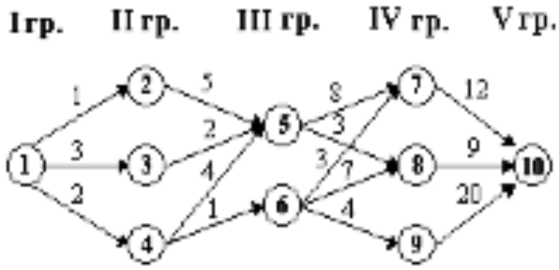
Получены следующие значения критериев: Maximin=5 (решение A1); Maximax=9 (A1); Minimax=3 (A1); Ожидаемое значение=6.9 (A3); Ожидаемое значение по принципу недостаточного основания=7.3 (A1); Ожидаемые потери =1.3 (A3).

Контрольные вопросы и задания:

1. Поставить и решить задачу. Пусть на двух предприятиях холдинга необходимо изготовить 200 изделий некоторой продукции. Затраты, связанные с производством x_1 изделий на первом предприятии, равны $4x_1^2$ руб., а затраты, обусловленные изготовлением x_2 изделий на втором предприятии, составляют $20x_2+6x_2^2$ руб. Определить, сколько изделий на каждом из предприятий следует произвести, чтобы общие затраты на производство необходимой продукции были минимальными.

2. Определить оптимальный вариант маршрутной технологии обработки деталей на пяти группах взаимозаменяемого оборудования, если известны техноло-

гические себестоимости каждой операции обработки и все возможные варианты технологических маршрутов.



3. Решить задачу распределения двух видов ресурсов для выпуска двух наименований изделий. Исходные данные - в табл.

Величина	c	d	D
x_1	6	3	5
x_2	8	1	6

Ограничения	Случайные величины					
	a_{i1}		a_{i2}		b_i	
	$\bar{a}_{i1}$	σ_{i1}	$\bar{a}_{i2}$	σ_{i2}	$\bar{b}_i$	θ_i
1	12	3	14	4	140	8
2	16	5	12	4	160	10

4. Найти решение игр по примерам 7-13 сведением к задачам ЛП.

5. Дана матрица игры $A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 7 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \\ 5 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$. Определить нижнюю и верхнюю цены, седловую точку, составить двойственную пару задач ЛП.

6. Решить игру, заданную матрицей A.

6.1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 4 & 6 \\ 7 & 4 & 9 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. 6.2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 9 & 7 & 4 \\ 6 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. 6.3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$. 6.4) $A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 7 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \\ 5 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

6.5) $A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \\ 7 & 7 & 8 \end{pmatrix}$. 6.6) $A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 7 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \\ 5 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$. 6.7) $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 3 \\ 5 & 9 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$. 6.8) $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 3 \\ 5 & 9 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$.

Список используемой литературы.

1. Адамчук А. С. Математические методы и модели исследования операций (краткий курс) : учебное пособие. Ставрополь : СКФУ, 2014. 163 с.
2. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Уч. пособие для студентов эконом. спец. вузов. М.: Высшая школа, 2006.
3. Акулич И.Л., Ворончук И.С. Задачи нелинейного и динамического программирования. Рига: Изд-во ЛГУ, 2009.
4. Балашевич В.А. Математические методы в управлении производством. Минск: Вышэйшая школа, 2006.
5. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. М.: Наука, 2014.
6. Вильямс Н.Н. Параметрическое программирование в экономике. М: Статистика, 2016.
7. Геращенко, И. П. Экономико-математические методы и модели : учебное пособие. Омск : ОмГПУ, 2017. 324 с.
8. Иванилов Ю.П., Лотов А.В. Математические модели в экономике. М.: Наука, 2019.
9. Карр Ч., Хоув Ч. Количественные методы принятия решений в управлении и экономике.- М.: Мир, 2016.
10. Крипак, Е. М. Математическое моделирование процессов и систем : учебное пособие. Оренбург : ОГУ, 2018.198 с.
11. Крушевский А.В., Швецов К.И. Математическое программирование и моделирование в экономике. Киев: Вища школа, 1979.
12. Кудрявцев Е.М. Исследование операций в задачах, алгоритмах, программах.- М.: Радио и связь, 2004.
13. Матричные игры /Под ред. Н.И.Воробьева. М.: Физматгиз, 2011.
14. П.Ф. Аскеров, Э.Ю. Ширяева, Т.В. Юсупова Экономико-математические методы: учебное пособие. М.,2011. 24 с.

15.Соколицын С.А. Применение математических методов в экономике и организации машиностроительного производства. Л.: Машиностроение, 2000.

Учебное издание

Белокопытов А.В.

Экономико-математические методы и модели:

методические рекомендации
и задания для практических занятий

Печатается в авторской редакции

Физ. печ. л. 11,1

ФГБОУ ВО Смоленская ГСХА
214000, Смоленск, ул. Б. Советская, 10/2